Секция «Програмирование»

Диофантовы уравнения второй степени с двумя неизвестными

Саада Даниель Фирасович
E-mail: thedas140@gmail.com

Уравнения в целых числах связаны со многими проблемами в теории чисел. Также диофантовы уравнения возникают в задачах, связанных с криптографическими системами, имеют применение в молекулярной физике и химии.

В работе рассматриваются методы нахождения решений уравнений второй степени с двумя неизвестными в целых числах, то есть уравнениям вида

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Диофантовы уравнения второго порядка достаточно хорошо изучены с теоретической точки зрения. Такое уравнение может не иметь решений в целых числах, может иметь конечное число решений в целых числах, а также может иметь бесконечно много целых корней [1]. В настоящей же работе рассматриваются непосредственно алгоритмы решения с использованием вычислительных систем, описан и реализован в виде программного обеспечения конкретный метод решения для общего случая, позволяющий находить корни уравнения или указывать на их отсутствие.

Очевидным алгоритмом решения диофантового уравнения является полный перебор всевозможных значений переменных на необходимом конечном промежутке и различные оптимизированные способы перебора, которые все равно требуют больше ресурсов и времени для вычислений, чем аналитические методы.

Для нахождения решений рассмотрим всевозможные частные случаи исходного уравнения. Можно выделить 5 основных случаев в зависимости от того, какой геометрический объект описывает уравнение: линейный случай при коэффициентах $A = 0, B = 0, C = 0$, эллиптический случай при $B^2 - 4AC < 0$, параболический случай при $B^2 - 4AC = 0$, простой гиперболический случай при $A = 0, C = 0, B \neq 0$ и общий гиперболический случай при $B^2 - 4AC > 0$. Линейный случай является диофантовым уравнением первой степени и может иметь бесконечное число корней, либо же не иметь решений. Корни можно найти при помощи Расширенного Алгоритма Евклида и некоторых элементарных математических преобразований. Простой гиперболический и параболический случаи также могут быть разрешены при помощи преобразований исходной формулы, используя делимость чисел и свойства наибольшего общего делителя. Параболический случай имеет бесконечное число решений, простой гиперболический случай может иметь как конечное, так и бесконечное число корней. Так как эллипс является замкнутой фигурой, эллиптический случай всегда имеет конечное число решений, каждое из которых является точкой эллипса, поэтому их вычисление заключается в нахождении промежутка значений одной переменной и подстановке этих значений в уравнение. Все пары таких чисел, в которых оба значения являются целыми числами, будут решениями. Общий гиперболический случай имеет бесконечное число решений, которые выражаются рекуррентными соотношениями.

Следуя предложенной схеме, разработанна программа с графическим интерфейсом. По коэффициентам диофантового уравнения второго порядка программа определяет к какому из вышеописанных случаев оно относится и существуют ли у него решения. Для каждого случая реализованы алгоритмы решения. В случае, если уравнение имеет конечное количество корней, они вычисляются и представляются в виде списка пар чисел. Если же уравнение имеет бесконечно много решений, то, в зависимости от конкретного случая, формируется либо система из двух уравнений с параметром, изменяя который можно получать новые решения, либо рекуррентные соотношения и некоторое частное решение для нахождения новых корней. Также пользователю предоставлена возможность вычислить заданное количество решений по найденным рекуррентным соотношениям или системе уравнений.

Источники и литература

1) Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. — 3-е изд. — М.: Наука, 1978. — 66 с. — (Популярные лекции по математике, вып. 8)
2) Dario Alejandro Alpern's page. — [Электронный ресурс] — Режим доступа: https://www.alpertron.com.ar/METHODS.HTM