Секция «Математика и механика»

Локально ограниченные решения одномерных законов сохранения.

Стеклова Лидия Владимировна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: lsteklova@gmail.com

В настоящей работе рассматривается задача Коши для уравнения

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с начальными данными

$$u\big|_{t=0} = u_0(x). \tag{2}$$

Функция потока $f(u)$ предполагается степенной, $f(u) = C|u|^{\alpha-1}u,\ \ \alpha > 1$.

Определение. Кусочно-гладкая функция $\mathbf{u}\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *обобщённым энтропийным решением* уравнения (1)-(2), если выполнены следующие условия:

1) в области гладкости $\mathbf{u}$ удовлетворяет (1)-(2) в классическом смысле;

2) на линиях разрыва выполнено условие Ранкина-Гюгонио [1, 2];

3) выполнено условие допустимости разрыва [1].

Это определение является ограничением более общего определения обобщённого энтропийного решения по Кружкову [1] на случай кусочно-гладкой функции $\mathbf{u}$.

Нас интересуют вопросы существования обобщённых энтропийных решений задачи (1)-(2) в случае, когда начальное условие u_0 не ограничено. Естественно, тогда и само решение $\mathbf{u}$ также является неограниченным и, следовательно, не подпадает под общую теорию обобщённых решений таких задач [3, 4], в которой эти решения обычно предполагаются из пространства L_∞.

Ранее [5] были построены решения задачи (1)-(2) в случае, когда начальное условие u_0 также является степенной функцией, $u_0(x) = |x|^{\beta-1}x,\ \ \beta > 0$, при условии $\beta(\alpha-1) > 1$. Эти обобщенные энтропийные решения имеют счетное число линий сильного разрыва (ударных волн) и меняют свой знак при переходе через каждую из этих линий. Отметим, что эти решения при фиксированном (сколь угодно малом) положительном $t > 0$ имеют скорость роста порядка $|x|^{1/(\alpha-1)}$ при $x \to -\infty$, которая не зависит от показателя β.

В докладе будет построено решение в том случае, когда начальная функция u_0 имеет более высокий, а именно, экспоненциальный, порядок роста при $x \to -\infty$.

Теорема. *Пусть* $f(u) = u^3/3$ *и* $u_0(x) = e^{-x/2}$. *Тогда верны следующие утверждения:*

1) существует обобщенное энтропийное решение $\mathbf{u}$ *задачи (1)-(2), определенное во всей полуплоскости* $t > 0$;

2) это решение имеет счётное число ударных волн $\gamma_n(t) = \ln t + 1 - n\mathfrak{C},\ \ n \in \mathbb{N}_0$, *где* $\mathfrak{C} = 3 - \ln 4$. *Области между ними* $\{(t,x) \mid \gamma_{n+1}(t) < x < \gamma_n(t)\}$ *обозначим через* $\mathbb{D}_n$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}_0$;

3) для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ в области $\mathbb{D}_n$, то есть между любыми двумя соседними ударными волнами, решение удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{u}(t,x) = (-1)^{n+1}\mathcal{U}(t, x + n\mathfrak{C}),$$

где через $\mathcal{U}\colon \mathbb{D}_0 \to \mathbb{R}$ обозначено построенное между первыми двумя ударными волнами решение, взятое с противоположным знаком. Функция $\mathcal{U}$ при этом задается в $\mathbb{D}_0$ неявным уравнением

$$\mathcal{U} = e^{-(x-\mathcal{U}^2 t+\mathfrak{C})/2}.$$

Отметим следующие свойства полученного решения. Во-первых, оно является знакопеременным, хотя начальное условие было положительным. Во-вторых, решение является односторонне-периодическим с периодом $2\mathfrak{C}$ и, более того, антипериодическим с периодом $\mathfrak{C}$. Как следствие, функция $\mathbf{u}(t_0, x)$ при фиксированном $t_0 > 0$ является ограниченной, в то время как начальное условие имеет экспоненциальный порядок роста.

Литература

1. Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка (Учебное пособие), М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999.

2. Evans L. C. Partial Differential Equations, Providence: AMS, 1998

3. Кружков С. Н. Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // ДАН СССР. 1969. Т. 187, №1. С. 29–32.

4. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка с многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81, №2. С. 228–255.

5. Панов Е. Ю. О классах корректности локально ограниченных обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, №5. С. 175–178.

Слова благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю А. Ю. Горицкому за неоценимую помощь в получении результатов. Также благодарю Александра Гаргянца за помощь при подготовке настоящего сообщения.