Секция «Математика и механика»

Инерциальные многообразия для гиперболических уравнений с сильной диссипацией

Чалкина Наталья Александровна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: chalkinan@mail.ru

В теории нелинейных эволюционных уравнений с частными производными большое внимание уделяется методам построения инерциальных многообразий, т.е. таких конечномерных липшицевых инвариантных многообразий, которые притягивают любые решения этих уравнений при $t \to +\infty$ с экспоненциальной скоростью (см., например, [2]).

В ограниченной области Ω рассматривается начально-краевая задача для квазилинейного сильнодиссипативного гиперболического уравнения:

$$\begin{gathered} u_{tt} - 2\gamma \Delta u_t = \Delta u + f(u), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) \in H_0^1(\Omega), \quad u_t\big|_{t=0} = p_0(x) \in L_2(\Omega). \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь γ — положительный коэффициент диссипации, а нелинейная функция $f(u)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет глобальному условию Липшица

$$|f(v_1) - f(v_2)| \leqslant L|v_1 - v_2|, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1. *Пусть λ_k $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \to \infty)$ — собственные значения оператора $-\Delta$ в области Ω с условиями Дирихле на границе, причем для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства*

$$\lambda_N < \lambda_{N+1} < \frac{1}{2\gamma^2},$$

$$2L < \sup_{\gamma\lambda_N \leqslant \Phi < \gamma\lambda_{N+1}} \{(\gamma\lambda_{N+1} - \Phi)\min\{\varkappa_1(\Phi), \varkappa_N(\Phi), \varkappa_{N+1}(\gamma\lambda_{N+1})\}\}, \tag{2}$$

где обозначено

$$\varkappa_k(\Phi) = \Phi - \gamma\lambda_k + \sqrt{\Phi^2 - 2\gamma\lambda_k\Phi + \lambda_k}.$$

Тогда в фазовом пространстве $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ существует $2N$-мерное инерциальное многообразие, которое экспоненциально притягивает (при $t \to +\infty$) все решения задачи (1).

Отметим, что в указанных условиях $(2\gamma^2\lambda_{N+1} < 1,\ \gamma\lambda_N \leqslant \Phi < \gamma\lambda_{N+1})$ выражения $\varkappa_1(\Phi)$, $\varkappa_N(\Phi)$ и $\varkappa_{N+1}(\gamma\lambda_{N+1})$ принимают положительные значения и оценка (2) имеет место при достаточно малых L.

Доказательство основано на построении нового скалярного произведения в фазовом пространстве, в котором выполнены условия теоремы из теории существования инерциальных многообразий для абстрактного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве (см. [1]).

Исследование поддержано грантом РФФИ 11-01-00339.

Литература

1. Горицкий А. Ю., Чепыжов В. В. Свойство дихотомии решений квазилинейных уравнений в задачах об инерциальных многообразиях // Мат. Сб. 2005. Т. 196. No. 4. С. 23-50.

2. Constantine P., Foias C., Nicolaenko B., Temam R. Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations // Appl. Math. Sciences. No. 70. New York: Springer, 1989.

Слова благодарности

Выражаю благодарность В. В. Чепыжову и А. Ю. Горицкому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.