Секция «Математика и механика»

Характеризация некоторых линейных операторов, сохраняющих свойство эллиптичности многочлена.

Шацкий Александр Алексеевич
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: alexander.shatskiy@gmail.com

Пусть T линейный оператор на пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не больше n. Определим для каждого такого оператора функцию $Q(x,y) = T((x+y)^n)$, где T продолжается на пространство $Lin\{x^k y^m, k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n, m \leq n\}$ по линейности и по правилу $T(x^k y^m) = T(x^k) y^m$.

Определение 1 *Многочлен называется эллиптическим, если он не имеет действительных корней.*

Пусть у нас есть дифференциальный оператор конечного порядка с постоянными коэффициентами, то есть $T = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{d}{dx} + \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} + ... + \alpha_m \frac{d^m}{dx^m}$. Будем говорить, что оператор сохраняет свойство эллиптичности, если он переводит эллиптические многочлены в эллиптические. В свою очередь эллиптические многочлены состоят из положительных многочленов и отрицательных. Аналогично определяется сохранение свойства положительности/отрицательности.

Теорема 1 *Если биективный оператор $T = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{d}{dx} + \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} + ... + \alpha_{m-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}$ переводит в себя множество эллиптических многочленов в пространстве $\mathbb{R}_{m-2}[x]$, то функции $Q_n(x,y) = T((x+y)^n)$, где $n \in \{x = 2k, k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{m}{2}\}$ являются одновременно выпуклыми или вогнутыми на всей плоскости. Причем, если оператор T сохраняет свойство положительности то функции Q_n выпуклы, иначе $-T$ сохраняет свойство положительности и функции Q_n вогнуты на всей плоскости.*

Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Александру Эмилевичу Гутерману за внимание к работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта МД-2535.2009.1.