Секция «Математика и механика»

Критерий симметризуемости строго гиперболической системы.

Палин Владимир Владимирович
Кандидат наук
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: grey_stranger84@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений с частными производными первого порядка

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{m} A_j \partial_{x_j} u = 0. \ (1)$$

Определение. *Будем говорить, что система (1) симметризуема, если существует невырожденная симметрическая матрица S такая, что SA_j – симметрическая матрица для всех $j = 1, \ldots, m$. Если при этом матрица S положительно определена, то систему (1) будем называть строго симметризуемой. Матрицу S будем называть симметризатором множества матриц $\{A_j\}_{j=1}^m$.*

В данной работе предлагается критерий симметризуемости строго гиперболической по Петровскому системы (1). Другой результат в этой области предложен в работе [1]. Для формулировки результата нам потребуются следующие обозначения.

Обозначение. *Обозначим I_r матрицу размера $r \times r$ такую, что на побочной диагонали у нее стоят единицы, а на остальных местах – нули. Пусть блочно-диагональная матрица $J = diag\{J_1, \ldots, J_q\}$ состоит из жордановых клеток J_r размера d_r. Обозначим S_J блочно-диагональную матрицу $S_J = diag\{I_{d_1}, \ldots, I_{d_q}\}$.*

Множество всех симметризаторов заданной матрицы описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A – квадратная матрица, Q – квадратная матрица того же размера, что и A, $\det Q \neq 0$, $Q^T = Q$. Тогда матрица QA симметрическая тогда и только тогда, когда существует матрица C такая, что $A = CJC^{-1}$, J – жорданова нормальная форма, и имеет место равенство*

$$Q = (C^{-1})^T S_J C^{-1}$$

Из теоремы 1 следует критерий строгой симметризуемости строго гиперболической по Петровскому системы (1).

Теорема 2. *Пусть система уравнений с частными производными первого порядка (1) строго гиперболическая по Петровскому. Пусть также невырожденная матрица C такова, что матрица $C^{-1}A_1C$ – диагональная. Тогда система (1) строго симметризуема тогда и только тогда, когда существуют $l_1, \ldots, l_n > 0$ такие, что матрицы*

$$diag\{l_1, \ldots, l_n\} C^{-1} A_j C = L C^{-1} A_j C$$

симметрические для всех $j = 2, \ldots, m$. При этом, если такая матрица L существует, то общий симметризатор множества матриц $\{A_j\}_{j=1}^m$ имеет вид $S = (C^{-1})^T L C^{-1}$.

Литература

1. Панов Е.Ю. О симметризуемости гиперболических систем первого порядка // Доклады Академии Наук. 2004. Т. 396. No. 1. С. 1-4.