Секция «Математика и механика»

Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени нечетного простого числа

Шевцова Мария Витальевна
Аспирант
Белгородский государственный университет, Факультет математики и информационных технологий, Белгород, Россия
E-mail: masha_shev@mail.ru

Пусть $\tau_k(n)$ означает число решений в натуральных числах уравнения $x_1 \dots x_k = n$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n) \qquad (1)$$

где n принадлежит арифметической прогрессии с разностью D, являющейся степенью фиксированного нечетного простого числа. Для этой суммы можно получить нетривиальную асимптотическую формулу при произвольном $D \le x^{\frac{\alpha_0}{k}}$, $\alpha_0 > 0$— постоянная. С ростом параметра D задача получения асимптотики для суммы (1) усложняется, так как прогрессия становится более редкой. Специальный вид разности $D = p_0^n$ позволяет получить лучший результат (p_0 — произвольное фиксированное нечетное простое число).
В статье М. М. Петечука [2] получена следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{\substack{n\le x \\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{xQ_{k-1}(\ln x)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{x^{1-\varkappa}}{\varphi(D)}\right),$$

где $(l, D) = 1$, Q_{k-1} — многочлен степени $k-1$ от переменной z с коэффициентами, зависящими от k и p_0, $\varkappa = \min\left\{\frac{\varepsilon}{16}, \frac{\beta}{k^3}\right\}$, $\beta > 0$ — константа, зависящая от p_0, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Эта формула справедлива при $D \le x^{3/8-\varepsilon}$.
Доказательство этой формулы опирается на идею А. А. Карацубы [1], позволяющую решать эту задачу по схеме аддитивной тернарной задачи с использованием оценок сумм характеров.
В настоящем докладе результат М. М. Петечука уточняется в следующих частных случаях:

1. При $k = 2$ асимптотическую формулу для суммы (1) можно получить при $D \le \sqrt{x}\ln^{-c} x$, $c > 0$ — константа.

2. При $k = 3$ асимптотическую формулу для суммы (1) можно получить при $D \leq x^{\frac{3}{7}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число.

Литература

1. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях// Докл. АН СССР, Сер. Математическая, т.192. 1970. No.4. С. 724-727.

2. Петечук М.М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени нечетного простого числа// Докл. АН СССР, Сер. Математическая, т.43. 1979. No.4. С. 892-908.