Секция «Математика и механика»

Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства.

Еремин Алексей Юрьевич
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: deja0vecu@gmail.com

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства впервые была поставлена Ивановым и Тужилиным в статье [1]. Она возникла на стыке двух классических проблем: проблемы Штейнера о кратчайшей сети и проблемы Громова о минимальном заполнении гладкого многообразия.

Пусть дано конечное метрическое пространство M. Рассматриваются всевозможные связные взвешенные графы, такие что множество их вершин содержит M и для любых двух точек из M вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве (такие взвешенные графы называются *заполнениями* данного метрического пространства). Задача состоит в поиске *минимального заполнения*, то есть заполнения наименьшего веса. Вес минимального заполнения пространства M обозначается $\mathrm{mf}(\mathcal{M})$.

Теорема 1. [1] Минимальное заполнение метрического пространства всегда существует, более того, существует минимальное заполнение, являющееся бинарным деревом (то есть деревом, у которого вершины, лежащие в M, имеют степень 1, остальные вершины имеют степень 3).

Таким образом, для поиска веса минимального заполнения достаточно рассмотрения заполнений, являющихся бинарными деревьями.

Определение 2. [2] Назовем *мультиобходом кратности* k бинарного дерева $G = (V, E)$ замкнутый путь, проходящий $2k$ раз по каждому ребру графа G.

Пусть теперь бинарное дерево G затягивает метрическое пространство M. Тогда каждому мультиобходу π можно поставить в соответствие число $p(M, \pi)$ — периметр этого обхода.

Теорема 2. [2] Вес минимального заполнения конечного метрического пространства M может быть найден по формуле

$$\mathrm{mf}(\mathcal{M}) = \min_G \max_\pi p(\mathcal{M}, \pi),$$

где G — всевозможные бинарные деревья, затягивающие $\mathcal{M}$, π — их мультиобходы, $p(\mathcal{M}, \pi)$ — соответствующие периметры.

Данная формула полезна как и сама по себе, так и при доказательстве различных свойств минимальных заполнений метрических пространств.

Литература

1. А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Математический сборник, в печати.

2. А. Ю. Еремин. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Математический сборник, в печати.