Секция «Математика и механика»

Связь между графами Кэли и проблема слов в одном классе конечных групп

Голубев Константин Викторович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: kgolubev@gmail.com

В данной работе рассматриваются графы Кэли фактор-групп плоской кристаллографической группы $p2$, порожденной тремя полуоборотами шестиугольника. Приведен способ построения по графу Кэли заданной группы графа Кэли группы в 4 раза большего порядка.

Группа $p2$ задается копредставлением (см. [1], стр. 66):

$$p2 = \left\langle\, T_1, T_2, T_3 \,|\, (T_1)^2 = (T_2)^2 = (T_3)^2 = (T_1T_2T_3)^2 = E \,\right\rangle.$$

Обозначим граф Кэли группы $p2$ через $Cay(p2)$. Так как в указанном копредставлении все порождающие элементы имеют порядок 2, то граф Кэли можно считать неориентированным. Группа $p2$ бесконечна, и граф $Cay(p2)$ представляет собой замощение плоскости шестиугольной сеткой с ребрами трех цветов (по одному для каждого из порождающих элементов), каждой вершине инцидентны ребра всех трех цветов. Если вложить граф $Cay(p2)$ в плоскость, то циклический порядок ребер вокруг вершин становится зафиксированным и одинаковым для всех вершин графа.

Добавляя в копредставление группы $p2$ следующие два соотношения (это соответствует переходу к фактор-группе), мы получаем конечную группу (см.[1], стр.158):

$$\Gamma_{b,c} = \left\langle\, p2 \,|\, (T_2T_3)^b(T_2T_1)^c = (T_2T_3)^c(T_1T_2)^{b+c} = E \,\right\rangle,$$

где b и c произвольные неотрицательные числа, $b \cdot c \neq 0$. Порядок группы $\Gamma_{b,c}$ равен $2(b^2 + bc + c^2)$. Граф Кэли $Cay(\Gamma_{b,c})$ можно вложить в тор таким образом, что циклический порядок ребер вокруг вершин был одинаковым на всем графе, что даст покрытие тора конечной шестиугольной сеткой. В частности, такое покрытие можно получить факторизацией плоскости с вложенным в нее графом $Cay(p2)$ по некоторой решетке.

Процедура.
Пусть дан граф Кэли $Cay(\Gamma_{b,c})$ для некоторых b и c. Будем считать его вложенным в тор. Пронумеруем цвета ребер числами от 1 до 3 соответственно индексам порождающих элементов. Добавим вокруг каждой вершины графа три новые вершины — по одной в каждую из инцидентных граней. Если исходная вершина отвечала элементу g группы $\Gamma_{b,c}$, то обозначим новую вершину, находящуюся между ребрами цветов 1 и 2 через g_3 (между 2 и 3 — через g_1, между 3 и 1 — через g_2). Затем соединим исходные и новые вершины следующим образом ($i = 1, 2, 3$): вершину g с вершиной g_i соединим ребром цвета i; если вершины g и h были соединены в исходном графе ребром цвета i, то соединим вершины g_i и h_i ребром цвета i. После этого сотрем ребра исходного

графа. Полученный граф обозначим через $\overline{Cay(\Gamma_{b,c})}$. Необходимо отметить, что данная процедура обратима.

Утверждение.
Граф $\overline{Cay(\Gamma_{b,c})}$ есть граф Кэли $Cay(\Gamma_{2b,2c})$.

Следствие.
Слово $a_0 \dots a_{3n-1}$, $a_i \in \{T_1, T_2, T_3\}$, где $\{a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2}\} = \{T_1, T_2, T_3\}$ для всех неотрицательных целых k, равно единице в группе $\Gamma_{2b,2c}$ тогда и только тогда, когда слово $a_1 a_4 \dots a_{3k+1} \dots a_{3n-2}$ равно единице в группе $\Gamma_{b,c}$.

Литература

1. Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж., Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М., 1980.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Г.Б.Шабату за ценные указания и постоянное внимание, а также участникам семинара “Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями“ за дружественную атмосферу и полезные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 10-01-00709-а.