Секция «Математика и механика»

Частичные порядки на алгебре матриц и их аналоги для гильбертовых пространств

Ефимов Михаил Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: efimov.mikhail@gmail.com

Пусть $M_n(\mathbb{F})$ обозначает пространство квадратных матриц порядка n с коэффициентами из произвольного поля $\mathbb{F}$.

Определение 1 *(Р. Хартвиг) Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{-}{\leqslant} B$, если и только если* $\operatorname{rk}(B - A) = \operatorname{rk} B - \operatorname{rk} A$.

Определение 2 *Групповая обратная матрица $A^\sharp$ для $A \in M_n(\mathbb{F})$ — это матрица, удовлетворяющая следующим соотношениям:*
1)$AA^\sharp A = A$; 2)$A^\sharp A A^\sharp = A^\sharp$; 3)$AA^\sharp = A^\sharp A$.

Определение 3 *(С.-К. Митра) Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{\sharp}{<} B$, если и только если для A существует $A^\sharp$, $A \neq B$ и $AA^\sharp = BA^\sharp = A^\sharp B$. Кроме того, $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, если $A = B$ или $A \overset{\sharp}{<} B$.*

Указанные отношения $\overset{-}{\leqslant}$ и $\overset{\sharp}{\leqslant}$ являются частичными порядками на множестве матриц, то есть рефлексивны, антисимметричны и транзитивны. Оказывается, понятия $\overset{-}{\leqslant}$- и $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядков могут быть перенесены на случай ограниченных линейных операторов в гильбертовых пространствах.

Определение 4 *(П. Шемрл) Пусть H — гильбертово пространство. Обозначим через $B(H)$ алгебру линейных ограниченных операторов на H. Для $A, B \in B(H)$ имеем $A \overset{-}{\leqslant} B$, если и только если существуют такие идемпотентные операторы $P, Q \in B(H)$, что*
1)$\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$; 2)$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} Q$; 3)$PA = PB$; 4)$AQ = BQ$.

Нами предложено следующее определение:

Определение 5 *Пусть H — гильбертово пространство, $A, B \in B(H)$. Тогда $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, если и только если $A = B$, или существует такой идемпотентный оператор $P \in B(H)$, что*
1)$\operatorname{Im} P = \overline{\operatorname{Im} A}$; 2)$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$; 3)$PA = PB$; 4)$AP = BP$.

Теорема 6 *Пусть H — гильбертово пространство. Тогда отношение $\overset{\sharp}{\leqslant}$ есть частичный порядок на $B(H)$. Кроме того, если $A, B \in B(H)$, $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, то $A \overset{-}{\leqslant} B$.*

В докладе будут рассмотрены также некоторые свойства отображений матричной алгебры, монотонных относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка.

Определение 7 *Пусть $\leqslant$ — некоторый частичный порядок на $M_n(\mathbb{F})$. Отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\leqslant$-порядка, если для любых матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ из $A \leqslant B$ следует $T(A) \leqslant T(B)$.*

Например, нами получена следующая теорема:

Теорема 8 *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$, аддитивное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Тогда существуют обратимая матрица $P \in M_n(\mathbb{F})$, ненулевой эндоморфизм f поля $\mathbb{F}$ и $\alpha \in \mathbb{F}$ такие, что T имеет вид $T(X) = \alpha P^{-1} X^f P$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$ или $T(X) = \alpha P^{-1} (X^f)^t P$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$.*

Слова благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю А. Э. Гутерману за постоянное внимание к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МД-2535.2009.1.