## Секция «Математика и механика»

### Кубические копулы, их свойства и оценивание

***Зайцев Виктор Николаевич***
*Студент*
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия*
*E-mail: zero-a1@mail.ru*

Если дана пара случайных величин (X, Y), в которой каждая компонента распределена экспоненциально, то встает вопрос о совместном распределении этой пары. Этот вопрос удобно решать с помощью теории копул. В работе исследуется применение копул с горизонтальными и вертикальными кубическими сечениями. Это четырехпараметрическое семейство, имеющее вид [1,2]:

$$C(u, v) = uv + uv(1-u)(1-v)[a_1 v(1-u) + a_2(1-v)(1-u) + b_1 uv + b_2 u(1-v)]$$

где параметры $a_1, a_2, b_1, b_2$ принадлежат области допустимых значений, а именно точки $(a_2, a_1), (b_1, b_2), (b_1, a_1), (b_2, a_2)$ должны принадлежать области S, являющейся объединением квадрата $[-1, 2] \times [-2, 1]$ и эллипса $x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y \leq 0$.

В работе рассмотрены проблемы генерации пары случайных величин по заданной копуле и оценивания параметров копулы по данной выборке. Генерация производится методом отбора [3]. Для оценки параметров копулы пары случайных величин (X,Y) вводится специальная интегральная функция $\varphi(w) : [0, 1] \to R, \varphi(w) = E\min(\frac{X}{w}, \frac{Y}{1-w})$. Эта функция служит "показателем зависимости"между X и Y и, исходя из определения на практике легко оценивается выборочным средним. Оказывается, что параметры исходной копулы находятся во взаимнооднозначном соответствии с функцией $\varphi(w)$. Исследовано поведение функции $\varphi(w)$ при различных значениях параметров, построены графики. Найдены ее максимальное и минимальное значения, которые позволяют судить о возможности использовать кубические копулы для анализа конкретных данных.

Для оценки можно взять значения $\varphi$ в четырех разных точках, к примеру $w_1 = 0,2; w_2 = 0,4; w_3 = 0,6; w_4 = 0,8$ и решить линейную систему из 4 уравнений и 4 неизвестных. Однако оценки полученные таким подходом не являются удовлетворительными в том плане, что слишком зависят от экспериментальной погрешности в данных. Этот метод может быть использован при сокращении числа параметров до 2 или 1. Проведено сравнение различных способов получения оценок. Метод наименьших квадратов также дает неудовлетворительный результат. В качестве оптимального выбран модифицированный метод наименьших квадратов. Он отличается от классического введением ограничений типа неравенств на неизвестные параметры.

Несмотря на необходимость рассматривать большое число случаев при таком подходе, вычисления получаются намного проще, чем поиск ОМП. Проводится исследование применимости такого метода оценивания параметров и выделяется семейство кубических копул, для которого этот метод оценивания приемлем (получается из исходного ограничением $a_2 = b_1 = a$). Полученное трехпараметрическое семейство включает в себя копулы Фарли-Гумбеля-Моргенштерна и Сарманова.

### Литература

1. Roger B. Nelsen. An Introduction to Copulas. Springer-Verlag, New York, 1998.
2. Nelsen RB, Quesada-Molina JJ, Rodriguez-Lallena JA (1997) Bivariate copulas with cubic sections.
3. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.