

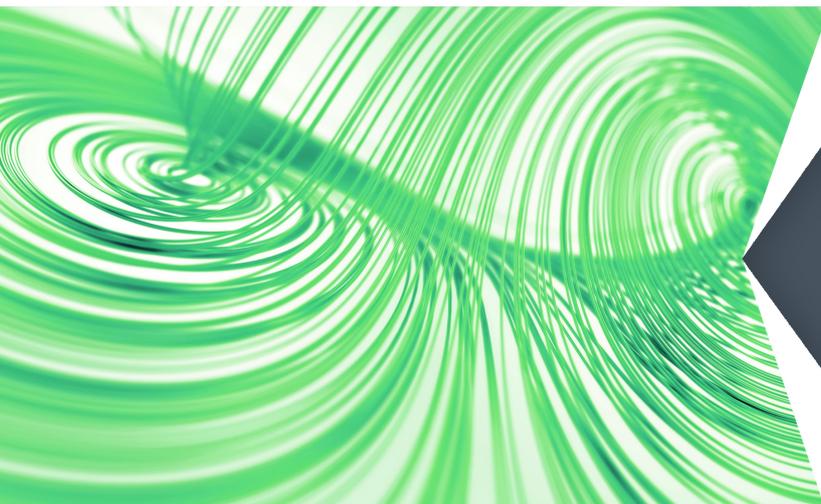


INTERNATIONAL
CONFERENCE
«DYNAMICS.
YAROSLAVL»
2019

Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова /
P.G. Demidov Yaroslavl State University

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ДИНАМИКА 2019. ЯРОСЛАВЛЬ



2019

10-12 ОКТЯБРЯ / OCTOBER 10-12

INTERNATIONAL CONFERENCE
DYNAMICS
2019. YAROSLAVL



ЯРГУ им. П.Г. Демидова



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РАН

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Международная научная конференция
ДИНАМИКА. 2019. ЯРОСЛАВЛЬ
ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ КОНФЕРЕНЦИИ

Ярославль, 10–12 октября 2019 г.

P.G. Demidov Yaroslavl State University
Steklov Mathematical Institute (RAS) in Moscow

International Scientific Conference
DYNAMICS. 2019. YAROSLAVL
ABSTRACTS

Yaroslavl, October 10–12, 2019

**Международная научная конференция
ДИНАМИКА. 2019. ЯРОСЛАВЛЬ
Ярославль, 10–12 октября 2019 г.**

ОРГАНИЗАТОРЫ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

В. В. Козлов (сопредседатель),
С. А. Кащенко (сопредседатель),
С. Д. Глызин,
Н. А. Кудряшов,
Л. М. Лерман,
Н. Н. Нефедов,
Д. В. Трещев,
Д. В. Тураев

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

С. Д. Глызин (председатель),
Д. В. Глазков,
И. С. Кащенко,
П. Н. Нестеров,
А. О. Толбей (секретарь),
Д. Ю. Чалый

**International Scientific Conference
DYNAMICS. 2019. YAROSLAVL
Yaroslavl, October 10–12, 2019**

ORGANIZERS

P. G. Demidov Yaroslavl State University
Steklov Mathematical Institute (RAS) in Moscow

PROGRAM COMMITTEE

V. Kozlov (co-chairman),
S. Kaschenko (co-chairman),
S. Glyzin,
N. Kudryashov,
L. Lerman,
N. Nefedov,
D. Treschev,
D. Turaev

ORGANIZING COMMITTEE

S. Glyzin (chairman),
D. Glazkov,
I. Kaschenko,
P. Nesterov,
A. Tolbey (secretary),
D. Chaly

УДК 517.938
ББК В311
Д 49

Д 49

Динамика. 2019. Ярославль : тезисы докладов конференции. — Ярославль : ЯрГУ ; 2019. — 104 с. — (Международная научная конференция, 10–12 октября 2019 г., г. Ярославль)

ISBN 978-5-8397-1183-9

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова проводит с 10 по 12 октября 2019 года в г. Ярославле международную научную конференцию «Динамика. 2019. Ярославль». Данный сборник содержит тезисы докладов, представленных на конференцию. Тезисы докладов публикуются в авторской редакции.

Конференция поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 18-29-10055 и № 18-29-10043).

УДК 517.938
ББК В311

ISBN 978-5-8397-1183-9

© ЯрГУ, 2019

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Аверина В. В., Кудряшов Н. А.	
Нелинейные волновые процессы в среде взаимодействующих частиц без учета столкновений Nonlinear wave processes in a medium of interacting particles without collisions	11
Алексеева Е. С., Рассадин А. Э.	
Коэффициенты нелинейных искажений “естественных” наблюдаемых для классической частицы в потенциале Калоджеро Total harmonic distortions of “natural” observable values for classical particle in the Calogero potential	14
Бухштабер В. М., Глуцук А. А., Тertyчный С. И.	
Семейства динамических систем и уравнений Гойна в модели перехода Джозефсона Families of dynamical systems and Heun equations in a model of Josephson junction	17
Быков А. А., Ермакова К. Е.	
Контрастные структуры как решения задачи реакции-диффузии с корнями произвольной кратности Contrast structures as solutions of the reaction-diffusion problem with roots of arbitrary multiplicity	21
Глызин С. Д., Кащенко С. А., Толбей А. О.	
Быстро осциллирующие решения уравнения с нелинейностями дислокаций и Ферми–Паста–Улама Fast-oscillating solutions of equations with nonlinearities of dislocations and Fermi–Pasta–Ulam	24
Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.	
Двухкластерная синхронизация в полностью связанных генных сетях Two-cluster synchronization in fully coupled genetic networks	27

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Голубенец В. О.	
Релаксационные решения уравнения Хатчинсона с непостоянным запаздыванием Relaxation solutions of Hutchinson equation with inconstant delay	29
Горюнов В. Е.	
Режимы с самоорганизацией одного класса распределенных биофизических моделей Self-organization modes of one class of distributed biophysical models	32
Запов А. С.	
Одномодовые периодические решения в модельной задаче В.В. Болотина One-mode periodic solutions in the V.V.Bolotin's model problem	34
Ивановский Л. И.	
Потеря устойчивости нулевого состояния равновесия одной нелинейной краевой задачи с отклонением в краевом условии Stability loss of zero balance state of nonlinear boundary-value problem with deviate in boundary condition . . .	37
Кащенко А. А.	
Динамика двух слабо связанных осцилляторов с запаздыванием при различной величине связи Dynamics of two weakly coupled oscillators with delay for various coupling strength	38
Кащенко И. С.	
Локальная динамика логистического уравнения с двумя запаздываниями The local dynamics of logistic equation with delays . .	40
Кащенко И. С., Маслеников И. Н.	
Исследование локальной динамики модели оптоэлектронного осциллятора The study of local dynamics in an optoelectronic oscillator model	43

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Кащенко С. А.	
Динамика двухкомпонентных параболических систем шредингеровского типа	
The dynamics of two-componet parabolic schroedinger type system	44
Ковалева А. М.	
Локальные бифуркации в одном функционально- дифференциальном уравнении	
Local bifurcations in one functional-differential equation	46
Коновалов Е. В.	
Об одной перспективной нейросетевой модели	
About the one perspective neural network model	48
Коротков А. Г., Казаков А. О., Леванова Т. А.	
Влияние мемристорной связи на динамику ансамбля элементов ФитцХью-Нагумо	
Effects of memristor-based coupling in the ensemble of FitzHugh-Nagumo elements	51
Кудряшов Н. А.	
Обобщённые нелинейные уравнения Шредингера для описания оптических солитонов	
Generalized nonlinear Schrödinger equations for description optical solitons	53
Кудряшов Н. А., Лаврова С. Ф.	
Нелинейная динамика уравнения Радхакришнана-Кунду- Лаксманана в переменных бегущей волны	
Nonlinear dynamics of the traveling wave reduction for the Radhakrishnan-Kundu-Laksmanan equation	56
Кудряшов Н. А., Сафонова Д. В., Biswas А.	
Интегрируемость уравнения Радхакришнана-Кунду- Лаксманана в переменных бегущей волны	
Integrability of traveling wave reduction for the Radhakrishnan- Kundu-Laksmanan equation	58
Куликов А. Н., Куликов Д. А.	
Бифуркации состояний равновесия в вариационном уравнении Гинзбурга-Ландау	
Bifurcations of equilibrium states at the variotional Ginzburg- Landau equation	61

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Куликов В. А.

- Исследование состояний равновесия и их устойчивости начально-краевой задачи для нелинейного параболического дифференциального уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием
Investigation of equilibrium states and their stability of the initial-boundary-value problem for a nonlinear parabolic differential equation with a spatial argument rotation operator and delay 63

Левашова Н. Т., Тищенко Б. В.

- Существование и устойчивость автоволнового решения системы уравнений в среде с барьерами
Existence and stability of the autowave solution to the system of equations in media with barriers 67

Лукьяненко Д. В.

- Некоторые особенности использования методов асимптотического анализа при решении обратных задач для нелинейных сингулярно возмущённых уравнений
Asymptotic analysis in solving of inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations 70

Марушкина Е. А., Самсонова Е. С.

- Динамические свойства нормальной формы для системы уравнений Хатчинсона с конкурентной и диффузионной связью
Dynamic properties of normal form for a system of Hutchinson equations with competitive and diffusion coupling . . . 73

Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н.

- Существование погранслоного решения в эллиптической задаче с сингулярным граничным условием
Existence of a boundary layer solution in an elliptic problem with a singular boundary condition 76

Нестеров П. Н.

- Асимптотическое суммирование систем линейных разностных уравнений в критическом случае
Asymptotic summation of perturbed linear difference systems in critical case 78

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Нефедов Н. Н., Никулин Е. И.	
О пограничных и внутренних слоях в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция с модульными источниками и сингулярно возмущенными граничными условиями	
Boundare and internal layers in multidimensional reaction-diffusionadvection problems with modular sources and singularly perturbed boundary conditions	79
Николаева О. А., Левашова Н. Т.	
Асимптотически устойчивые стационарные решения уравнения реакция-диффузия-адвекция	
The asymptotically stable stationary solutions of reaction-diffusion-advection equation	82
Орлов А. О., Нефедов Н. Н.	
Контрастные структуры в задачах для уравнения реакция-диффузия с разрывной правой частью	
Contrast structures in problems for the reaction-diffusion equation with a discontinuous right-hand side	83
Преображенская М. М.	
Периодическое решение релейной модели уравнения Мэки-Гласса с двумя запаздываниями	
A periodic solution of a relay model of the Mackey-Glass equation with two delays	84
Розаев А. Е.	
Численное моделирование орбит астероидов, близких к резонансу 3:1	
Numeric modeling of asteroid orbits close to 3:1 resonance	86
Ромакина Л. Н.	
Световые петли на сферах в расширенном гиперболическом пространстве	
Light loops on spheres in an expanded hyperbolic space	88
Сбоев А. Г., Молошников И. А., Рыбка Р. Б., Грязнов А. В.	
Генеративно-дискриминативная нейросетевая модель для решения задачи определения пола автора текста на ограниченных выборках	
Generative-discriminative neural model for solving the task of determining of author's gender with limited training sets	91

СОДЕРЖАНИЕ (CONTENTS)

Сбоев А. Г., Рыбка Р. Б., Серенко А. В.	
Оценка изменения синаптических весов нейрона под действием Spike-Timing-Dependent Plasticity с ограниченной симметричной схемой учёта пар спайков Synaptic weight change estimate of a neuron with Spike-Timing-Dependent Plasticity with the restricted symmetric spike pairing scheme	94
Секацкая А. В.	
Характер локальных бифуркаций уравнения Курамото-Сивашинского в различных областях The nature of local bifurcations of the Kuramoto-Sivashinsky equation in different areas	97
Varabash N. V., Belykh V. N.	
Wild attractor in the model of rotator-oscillator coupled via right hand sides	99
Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A.	
Various models of the rolling of a ball with varying mass distribution on a plane as a generalization of the Chaplygin problem	101
Buchstaber V. M., Mikhailov A. V.	
Symmetric powers, commuting polynomial Hamiltonians and Hydrodynamic type systems	102
Treschev D. V.	
Entropy of an operator	103

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ БЕЗ УЧЕТА СТОЛКНОВЕНИЙ

NONLINEAR WAVE PROCESSES IN A MEDIUM OF INTERACTING PARTICLES WITHOUT COLLISIONS

В. В. Аверина¹, Н. А. Кудряшов²

¹Национальный исследовательский ядерный университет
"МИФИ", Москва, Россия; lera_averina@mail.ru

²Национальный исследовательский ядерный университет
"МИФИ", Москва, Россия; nakudr@gmail.com

Рассматривается модель Ферми–Паста–Улама (ФПУ) с учетом взаимодействия между частицами, которое выражается потенциалом четвертой и пятой степени. Выполнен предельный переход при стремлении расстояния между частицами к нулю, а числа частиц к бесконечности. Показано, что вместо известного уравнения Кортевега–де Вриза (при учете квадратичного взаимодействия между частицами) получаются обобщенные уравнения Кавахары. Задача Коши для полученных уравнений не решается методом обратной задачи рассеяния. Уравнения рассмотрены в переменных бегущей волны. Установлено, что полученные ОДУ не проходят тест Пенлеве. Имеются комплексные индексы Фукса с положительной вещественной частью, что свидетельствует о наличии критических подвижных особых точек. С помощью метода простейших уравнений получены некоторые точные решения эволюционного уравнения пятого порядка.

Модель Ферми–Паста–Улама ранее изучалась в ряде работ (см. например [1-4]). Впервые она была предложена в 1952 году в Лос-Аламосе и представляет собой математическую модель распространения возмущений в цепочке точечных масс, взаимодействующих по нелинейному закону

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{i,i+1} - F_{i-1,i}, \quad (1)$$

где $F_{i,i+1}$ - потенциал взаимодействия между частицами.

В классической задаче ФПУ рассмотрен квадратичный потенциал [1]. В работах [4-6] была рассмотрена $\alpha + \beta$ модель ФПУ, т.е. модель

распространения возмущений в цепочке масс с кубическим потенциалом взаимодействия. Также было изучено взаимодействие двух волн в модели ФПУ[7]. В данной работе рассмотрены потенциалы взаимодействия 4-ой и 5-ой степени. В этом случае взаимодействие между частицами описывается формулами

$$\begin{aligned} F_{i+1,i} &= \gamma(x_{i+1} - x_i) + Q(x_{i+1} - x_i)^4 \\ F_{i+1,i} &= \gamma(x_{i+1} - x_i) + \Theta(x_{i+1} - x_i)^5 \end{aligned} \quad (2)$$

Устремив число частиц к бесконечности, а расстояние между ними к нулю[4], можно получить нелинейные эволюционные уравнения 5-го порядка, описывающие модель ФПУ с потенциалами (2)

$$\begin{aligned} u_t + u_x u^3 + \delta^2 u_{xxx} + \frac{2}{5} \delta^4 u_{xxxxx} &= 0, \\ u_t + u_x u^4 + \delta^2 u_{xxx} + \frac{2}{5} \delta^4 u_{xxxxx} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Эволюционные дифференциальные уравнения 5-го порядка (3) являются частными случаями обобщенного уравнения Кавахары[8]

$$u_t + a u_x u^n + b u_{xxx} - c u_{xxxxx} = 0. \quad (4)$$

Переходя к переменным бегущей волны, получены ОДУ

$$\frac{2}{5} \delta^2 w_{zzzzz} + \delta^2 w_{zzz} + w^n w_z - C_0 w_z = 0, \quad n = 3, 4 \quad (5)$$

Проведен анализ уравнений (5) на свойство Пенлеве. В обоих случаях два из трех индексов Фукса являются комплексными. Таким образом, оба уравнения не обладают свойством Пенлеве и исходные УЧП не могут быть решены методом обратной задачи рассеяния. Однако найдены некоторые точные решения уравнений в переменных бегущей волны [9]

$$w(z) = A \operatorname{sech}(Bz)^{\frac{4}{n}}. \quad (6)$$

Решение (6) представляет собой уединенную волну, где А и В являются параметрами, зависящими от степени взаимодействия и скорости бегущей волны C_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fermi E, Pasta J, Ulam S.* Studies of nonlinear problems // Los Alamos Report - LA-1940; 1955. p.978-988.
2. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. № 6. P. 240.
3. *Russel Scott J.* Report of waves, Report of the 14-th. Meeting of the British Association for the Advancement of Science, London, 1844, 311–390.
4. *Kudryashov N.A.* Refinement of the Korteweg-de Vries equation from the Fermi-Pasta-Ulam model, //Physics Letters A - 2015. - V.40-41. - P.2610-2614.
5. *Волков А.К. Кудряшов Н.А.* Уравнение высокого порядка для описания $\alpha + \beta$ модели Ферми-Паста-Улама // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2016. том 5. № 4. с. 308-320.
6. *Kudryashov N.A., Volkov A.K.* The fifth-order partial differential equation for the description of the $\alpha + \beta$ Fermi-Pasta-Ulam model //Commun Nonlinear Sci Numer Simulat - 2017. - V.42. - P.491-501.
7. *Glyzin S.D., Kashchenko S.A., Tolbey A.O.* Two-Wave Interactions in the Fermi–Pasta–Ulam Model // Automatic Control and Computer Sciences, 2017, Vol. 51, No. 7, pp. 627–633.
8. *Takuji Kawahara* Formation of Saturated Solitons in a Nonlinear Dispersive System with Instability and Dissipation // Physical review letters. 1983, vol. 51, no. 5. p. 381–383.
9. *Demina M.V., Kudryashov N.A.* From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Physics Letters A. 2010. V. 374. P. 4023– 4029.

**КОЭФФИЦИЕНТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ
"ЕСТЕСТВЕННЫХ" НАБЛЮДАЕМЫХ ДЛЯ
КЛАССИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЕ
КАЛОДЖЕРО**

**TOTAL HARMONIC DISTORTIONS OF "NATURAL"
OBSERVABLE VALUES FOR CLASSICAL PARTICLE IN
THE CALOGERO POTENTIAL**

Е. С. Алексеева, А. Э. Рассадин

*Лаборатория бесконечномерного анализа и математической
физики механико-математического факультета МГУ
им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; brat_ras@list.ru*

Хорошо известно, что в классической механике уравнение одномерного движения частицы единичной массы в потенциале Калоджеро:

$$U(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \quad (1)$$

имеет для её обобщённой координаты x следующее точное решение (см. [1] и ссылки там):

$$x(t, h) = +\sqrt{1 + \frac{h}{2} + \frac{\sqrt{h(h+4)}}{2}} \cos(2\sqrt{2}t), \quad (2)$$

где параметр $h \geq 0$ — энергия частицы.

В квантовой механике уравнение Шрёдингера с потенциалом (1) решается точно [2, стр. 55]. Функция Грина для потенциала Калоджеро, то есть соответствующий интеграл Фейнмана, также вычисляется точно [3].

Континуальный интеграл с потенциалом (1) возникает при нахождении явного вида полярного разложения меры Винера [4].

Наконец, при применении к нелинейному уравнению Клейна-Гордона-Фока с потенциалом Калоджеро теории модуляции Уизема оказывается, что для групповая v_g и фазовая v_p скорости модулированной волны связаны тем же соотношением $v_g v_p = 1$ [5], что и аналогичные величины в линейном уравнении Клейна-Гордона-Фока, потенциал которого соответствует потенциалу гармонического осциллятора, а при усреднении точного решения (2) по периоду

колебаний, оказывается, что $\overline{\dot{x}^2/2} = \overline{U(x)}$, то есть средние значения кинетической и потенциальной энергии частицы в потенциале Калоджеро равны [1] — точно также, как и в случае гармонического осциллятора.

Наряду с изохронностью нелинейных колебаний (2) это означает, что потенциал (1) обладает скрытой симметрией, и свойства этой симметрии надо исследовать дальше.

В работе [1] были найдены коэффициенты нелинейных искажений (КНИ) для скорости \dot{x} и ускорения \ddot{x} классической частицы в потенциале Калоджеро. Однако эти величины выглядят слишком сложно, потому что амплитуда первой Фурье-гармоники для координаты (2) выражается через полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода. Между тем, можно указать такие функции динамических переменных частицы, двигающейся в потенциале (1), ряды Фурье для которых не содержат специальных функций, а именно, для обратного квадрата функции (2) такой ряд имеет простой вид:

$$\frac{1}{x^2(t, h)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{h+4} \right)^{\frac{n}{2}} \cos(2\sqrt{2}nt). \quad (3)$$

КНИ этой функции (с учётом выделения её среднего значения) вычисляется с помощью формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$K \left[\frac{1}{x^2} - 1 \right] (h) = \frac{\sqrt{h(h+4)}}{4}. \quad (4)$$

Дифференцируя ряд (3) почленно, получим:

$$-\frac{2\dot{x}(t, h)}{x^3(t, h)} = 4\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{h}{h+4} \right)^{\frac{n}{2}} \sin(2\sqrt{2}nt), \quad (5)$$

откуда находим КНИ функции (5):

$$K \left[-\frac{2\dot{x}}{x^3} \right] (h) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{h(h^2 + 10h + 32)}{2}}. \quad (6)$$

Дифференцируя почленно ряд (5), можно вычислить КНИ для второй производной по времени от величины (3) и.т.д. Простая зависимость коэффициентов этих рядов Фурье от энергии и лёгкость

вычисления КНИ указывает на то обстоятельство, что наблюдаемые x^{-2} , $-2\dot{x}x^{-3}$ и т. д. являются более естественными для одномерной гамильтоновой системы с потенциалом (1), чем \dot{x} , \ddot{x} и пр. Отметим, что найденные ряды Фурье (3) и (5) имеют значение и для рассмотрения движения в потенциале Калоджеро квантовомеханической частицы, потому что квазиклассические матричные элементы этих величин совпадают с амплитудами Фурье классического движения [6].

В докладе приведены графики функций (4) и (6) и произведено их сравнение с графиками функций $K[\dot{x}](h)$ и $K[\ddot{x}](h)$, вычисленных в работе [1]. Кроме того, дана тракторка равенств Парсевалья для рядов Фурье (3) и (5) наблюдаемых величин x^{-2} и $-2\dot{x}x^{-3}$ рассматриваемой динамической системы как теорем вириала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Длина фазовой траектории и коэффициенты нелинейных искажений наблюдаемых для классической частицы в потенциале Калоджеро // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: материалы XIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 3-6 июня 2019 г.) / под ред. д. ф.-м. н., проф. И. В. Бойкова. Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. С. 3–9.
2. Гольдман И. И., Кривченков В. Д., Сборник задач по квантовой механике. М.: ГИИТЛ, 1957.
3. Peak D., Inomata A. Summation over Feynman Histories in Polar Coordinates // Journal of Mathematical Physics. 1969. V. 10, № 8. P. 1422–1428.
4. Белокуров В. В., Шавгулидзе Е. Т. Полярное разложение меры Винера: шварциановская теория в сравнении с конформной квантовой механикой // Теоретическая и математическая физика. 2019. Т. 200, № 3. С. 465–477.
5. Алексеева Е. С., Рассадин А. Э. Модифицированная теория модуляции Уизема для нелинейного уравнения Клейна-Гордона-Фока с простейшим дробно-рациональным потенциалом // Океанологические исследования. 2019. Т. 47, № 1. С. 12–14.
6. Мигдал А. Б., Крайнов В. П., Приближённые методы квантовой механики. М.: Наука, 1966.

**СЕМЕЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И
УРАВНЕНИЙ ГОЙНА В МОДЕЛИ ПЕРЕХОДА
ДЖОЗЕФСОНА**

**FAMILIES OF DYNAMICAL SYSTEMS AND HEUN
EQUATIONS IN A MODEL OF JOSEPHSON JUNCTION**

В. М. Бухштабер¹, А. А. Глуцюк², С. И. Тертычный³

¹*Математический Институт РАН им. В.А.Стеклова, Москва, Россия; Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений (ВНИИФТРИ), Менделеево, Московская обл., Россия; Центр Интегрируемых Систем Ярославского Государственного Университета им. П.Г.Демидова, Ярославль, Россия;*
buchstab@mi.ras.ru

²*Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS): Ecole Normale Supérieure de Lyon, Лион, Франция; Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, Москва Россия; Interdisciplinary Center J.-V.Poncelet, Москва, Россия;*
aglutsyu@ens-lyon.fr

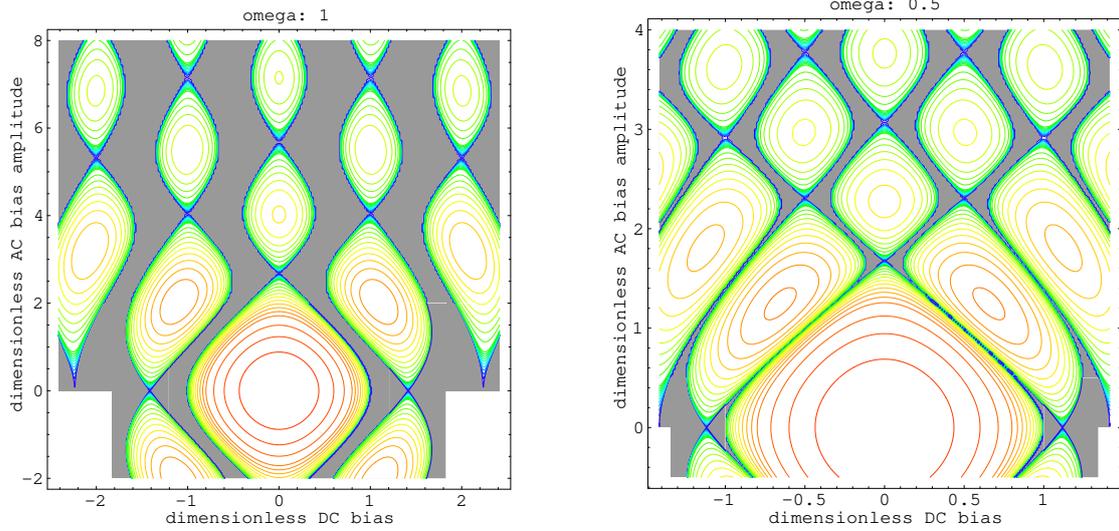
³*Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений (ВНИИФТРИ), Менделеево, Московская обл., Россия;*
bpt97bpt97@gmail.com

В 1973 году Брайану Джозефсону была присуждена Нобелевская премия "за теоретическое предсказание свойств тока сверхпроводимости, проходящего через туннельный барьер". В центре внимания доклада будет одна из известных моделей динамики перехода Джозефсона, которая эквивалентна семейству динамических систем на торе, демонстрирующему эффект захвата фазы типа языков Арнольда, см. диаграммы ниже.

Модель описывается семейством уравнений

$$\phi'_t + \sin \phi = f(\omega t, u), \quad \omega = \text{const}, \quad (1)$$

где функция $f(\tau, u)$ - 2π -периодична по τ , а u лежит в многообразии U параметров семейства. Замена $\tau := \omega t$, $g(\tau, u) := f(\omega^{-1}\tau, u)$



приводит (1) к семейству систем на торе:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -\sin \phi + g(\tau, u) \\ \dot{\tau} = \omega, \end{cases} \quad (\phi(\bmod 2\pi\mathbb{Z}), \tau(\bmod 2\pi\mathbb{Z})) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2. \quad (2)$$

Классическое число вращения Пуанкаре задаёт функцию $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$ при $\omega = const$. Множества уровней $L_r = \{u \in U \mid \rho(u) = r\}$, имеющие непустую внутренность, называются *зонами захвата фазы*. Как показано в [4], для системы (2) имеет место *эффект квантования*: зоны захвата L_r существуют только для *целых значений r* . Обратим внимание, что эффект квантования не наблюдается в случае известного семейства диффеоморфизмов окружности, которое привело к понятию "языки Арнольда". Семейство уравнений (1) с $g(\tau, u) = f(\omega^{-1}\tau, u) = B + A \cos \tau$, $u = (B, A) \in \mathbb{R}^2$, используется в исследованиях динамики перехода Джозефсона а также в ряде классических и современных задач физики, механики и геометрии. Далее мы будем его обозначать (1)*. См. выше диаграммы определяемых им зон захвата при $\omega = 1$ (слева) и при $\omega = 0.5$ (справа).

Положим $W := \rho^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$. Пусть $U = \mathbb{R} \times \mathcal{A}$. Рассмотрим семейство уравнений (1) с функцией $f(\tau, u) = B + h(\tau, \alpha)$, 2π -периодической по τ и аналитической по $(\tau, B, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$. Тогда оказывается, что отображение $\rho : W \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *транскверсально регулярно* и, более того: аналитично, не имеет критических точек, и для любого $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ прообраз $\rho^{-1}(r)$ есть график функции $B = \xi_r(\alpha)$, аналитической на всем многообразии \mathcal{A} . В случае системы (1)* возникают функции $\xi_r(\mathcal{A})$, см. [2], а каждая зона захвата представляет собой "гирлянду" из счётного множества компонент: детали см. в [9]. Всякая пара соседних компонент разделена одной точкой. Точки раздела, лежащие на оси B , называются точками роста, а не лежащие на

ней - *перемычками*, см. диаграммы выше. Фазовый портрет зон захвата симметричен относительно обеих осей координат. Это связано с наличием преобразований $(\phi, \tau) \mapsto (\phi, \tau + \pi)$ и $(\phi, \tau) \mapsto (-\phi, \tau + \pi)$, меняющих знак у A и B , соответственно. Точки роста задаются формулами: $A = 0$, $B^2 - r^2 \omega^2 = 1$, $r \in \mathbb{Z}$. Важная для приложений задача описания координат (B, A) перемычек оказалась трудной. Результаты в этом направлении получены в [1, 6, 7, 8].

Комплексификация и замены $\Phi = \exp(i\phi)$, $z = \exp(i\omega t)$ преобразуют уравнения (1) в уравнения Риккати

$$2\omega z \frac{d\Phi}{dz} = i(\Phi^2 - 1) + 2f(\tau, u)\Phi, \quad \tau = -i \ln z.$$

на римановой поверхности функции $\ln z$. Введя переменные $x(z)$ и $y(z)$, такие что $\Phi(z) = \frac{y(z)}{x(z)}$, получаем семейство систем линейных уравнений на вектор-функцию $(x(z), y(z))$. В случае уравнения (1)*, сделав замену параметров $\mu = \frac{A}{2\omega}$, $\ell = \frac{B}{\omega}$, соответствующие линейные системы можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\frac{G_2}{z^2} + \frac{G_1}{z} + G_0 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad G_2 = G_0 = \text{diag}(-\mu, 0), \quad G_1 = \begin{pmatrix} -\ell & \frac{1}{2i\omega} \\ \frac{1}{2i\omega} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Системы (3) имеют всего две особые точки на сфере Римана (в 0 и в ∞), и когда $\mu \neq 0$, обе они иррегулярны и нерезонансны. Замены $E(z) = y(z) \exp(\mu z)$, $\lambda = \frac{1}{4\omega^2} - \mu^2$ приводят к специальным дважды конфлюэнтным уравнениям Гойна

$$z^2 E'' + ((\ell + 1)z + \mu(1 - z^2))E' + (\lambda - \mu(\ell + 1)z)E = 0. \quad (4)$$

При $\mu \rightarrow 0$ уравнение (4) переходит в уравнение Коши–Эйлера:

$$z^2 E'' + (\ell + 1)zE' + \lambda E = 0.$$

Решения уравнения (1)* явно выражены через решения уравнения Гойна (4), см. [5, 6]. В [5] указаны параметры, при которых (4) имеет полиномиальное решение. Описано многообразие таких точек (B, A) при всех $\omega > 0$. Показано, что эти точки (B, A) лежат на пересечении границ зон захвата с прямой $B = \ell\omega$, см. [2, 5]. Получены явные формулы для числа вращения и для отображения Пуанкаре динамической системы на торе для всех таких (B, A) , см. [5].

В [1, 6] описаны условия на параметры уравнения (4) с $\mu \neq 0$, при которых его общее решение представляет собой аналитическую

функцию на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Исследование этих условий позволило получить следующий результат: если общее решение уравнения (4) с $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ аналитично на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, то его уравнение-антипод (4), т.е., с обратным знаком при ℓ , не имеет полиномиального решения, а ℓ -я производная любого нетривиального решения уравнения-антипода даёт нетривиальное решение исходного уравнения (4). В [6] построен в явном виде базис пространства решений, состоящий из пары функций, одна из которых голоморфна всюду, кроме бесконечности, а вторая – всюду, кроме нуля. Показано, что точка (B, A) , для которой все решения уравнения (4) аналитичны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, является перемычкой.

Другие результаты о зонах захвата для семейства динамических систем (2) и их приложения к динамике перехода Джозефсона в модели (1)* см. в статьях [2, 8, 9] и в цитированной литературе к ним. Все обсуждаемые результаты относятся как к вопросам, непосредственно связанным с физическими приложениями, см. [3], так и к математическим проблемам. Отметим также наши вычислительные эксперименты, позволившие увидеть динамику диаграмм зон захвата при $\omega \rightarrow 0$. Доказательства математических результатов опираются на теорию комплексных дифференциальных уравнений, теорию динамических систем, теорию дважды конфлюэнтных уравнений Гойна и их изомодромных деформаций вдоль решений уравнения Пенлеве-3. Некоторые вопросы о зонах захвата тесно связаны с обобщённой проблемой Римана-Гильберта для системы (3).

Мы представим обзор результатов и нерешённых задач.

Работа В.М. Бухштабера и С.И. Тертычного выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 17-01-00192). Работа А.А. Глуцюка выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (№ 18-41-05003).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buchstaber V. M., Glutsyuk A. A.* On determinants of modified Bessel functions and entire solutions of double confluent Heun equations. // *Nonlinearity*. 2016. Т. 29, С. 3857–3870.
2. *Бухштабер В. М., Глуцюк А. А.* Собственные функции монодромии уравнений Гойна и границы зон фазового захвата в модели сильношунтированного эффекта Джозефсона. // *Труды МИАН им. В.А.Стеклова*. 2017. Т. 297. С. 62–104.
3. *Бухштабер В. М., Карпов О. В., Тертычный С. И.* Особенности динамики Джозефсоновского перехода, смещённого синусоидальным СВЧ током. // *Радиотехника и электроника*. 2006. Т. 51, №6. С. 757–762.
4. *Бухштабер В. М., Карпов О. В., Тертычный С. И.* Эффект квантования числа вращения. // *ТМФ*. 2010. Т. 162, №2. С. 254–265.

5. Бухштабер В. М., Тертычный С. И. Семейство явных решений уравнения резистивной модели перехода Джозефсона. // ТМФ. 2013. Т. 176, №2. С. 164–188.
6. Бухштабер В. М., Тертычный С. И. Голоморфные решения дважды конфлюэнтного уравнения Гойна, ассоциированного с RSJ-моделью перехода Джозефсона. // ТМФ. 2015. Т. 182, №3. С. 373–404.
7. Глуцук А. А., Клепцын В. А., Филимонов Д. А., Щуров И. В. О квантовании перемычек в уравнении, моделирующем эффект Джозефсона. // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48, №4. С. 47–64.
8. Glutsyuk A. A., On constrictions of phase-lock areas in model of overdamped Josephson effect and transition matrix of double confluent Heun equation. // J. Dyn. Control Syst. 2019. Т. 25, №3. С. 323–349.
9. Klimenko, A. V.; Romaskevich O. L. Asymptotic properties of Arnold tongues and Josephson effect. // Mosc. Math. J. 2014. Т. 14, №2. С. 367–384.

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ КАК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ С КОРНЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРАТНОСТИ

CONTRAST STRUCTURES AS SOLUTIONS OF THE REACTION-DIFFUSION PROBLEM WITH ROOTS OF ARBITRARY MULTIPLICITY

А. А. Быков¹, К. Е. Ермакова²

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Москва, Россия; abkov@yandex.ru

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Москва, Россия; kristinaermakova1908@gmail.com

При работе с математическими моделями, основанными на нелинейных сингулярно возмущенных уравнениях (одним из таких уравнений является уравнение реакции-диффузии), довольно часто появляются решения с внутренними слоями, которые принято называть контрастными структурами [1]. Такие решения вызывают серьезный интерес у исследователей, так как они возникают при изучении ряда прикладных задач во многих научных областях, в частности, в химической кинетике, физике полупроводников, биофизике, астрофизике, в работах, посвященных геофизической плазме, а также в задачах реакции горения и взрыва и многих других. На

сегодняшний день активно изучаются контрастные структуры, возникающие при решении моделей, главное уравнение которых имеет в правой части нелинейность с вырожденными корнями [2-6].

В настоящей работе рассматривается одномерная модель, основанная на уравнении реакции-диффузии с малым параметром в однородной среде:

$$\begin{cases} \varepsilon u_t + V \varepsilon u_x = \kappa \varepsilon^2 u_{xx} - f(u, x), (x, t) \in \Pi, \\ u_x(a, t) = 0, u_x(b, t) = 0, u(x, 0) = \varphi_0(x), \end{cases}$$

$u \in C_2(\Pi) \cap C_1(\bar{\Pi})$, $\Pi = (a, b) \times (0, T)$, $\bar{\Pi} = [a, b] \times [0, T]$.

Будем считать, что $f(u)$ есть гладкая функция, уравнение $f(u) = 0$ имеет три упорядоченных изолированных корня: $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$. Общий вид рассматриваемой функции можно записать следующим образом

$$f(u) = f_1(u)f_2(u)f_3(u),$$

причем каждая из функций $f_{1;3}(u)$ имеет единственный корень

$$f_{1;3}(u) = \delta u_{1;3} \alpha_{1;3}(\delta u_{1;3}),$$

где $\delta u_1 = u - \varphi_1$, $\delta u_3 = u - \varphi_3$, функции $\alpha_1(\delta u_1)$ и $\alpha_3(\delta u_3)$ – заданные гладкие бесконечно малые положительные функции.

Мы рассматриваем как бесконечно малые степенные функции

$$\alpha_{1;3}(\omega) = C_{1;3} \omega^\gamma,$$

$\gamma > 0$, так и функции, убывающие быстрее любой степени, например,

$$\alpha_{1;3}(\omega) = C_{1;3} e^{-\gamma_{1;3}|\omega|}.$$

Таким образом выполнены условия, при которых возможно существование решений типа перемещающейся контрастной структуры [7].

В ходе работы показано, что передний и задний участки фронта контрастной структуры, являющейся решением поставленной задачи, по-разному стремятся к своим стационарным уровням, в частности, на заднем участке фронта стремление происходит более медленно, чем на переднем, имеющем экспоненциальную скорость стремления к предельному значению. Полученные результаты строго обоснованы с помощью метода дифференциальных неравенств, применение которого для обоснования задач с малым параметром разработано Н.Н. Нефедовым, а также согласуются с результатами компьютерного моделирования, проведенного в ходе исследований.

Авторы выражают благодарность профессору В.Ф. Бутузову и профессору Н.Н. Нефедову.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 16-01-00690-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998. Том. 4, № 3. С. 799–851.
2. Бутузов В. Ф. О периодических решениях сингулярно возмущенных параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения // *ЖВМиМФ*. 2011. Том. 51, № 1. С. 44–55.
3. Бутузов В. Ф., Бычков А. И. Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае трёхкратного корня вырожденного уравнения // *ЖВМиМФ*. 2016. Том. 56, № 4. С. 605–624.
4. Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Р. Асимптотика, устойчивость и область притяжения периодического решения сингулярно возмущенной параболической задачи с двукратным корнем вырожденного уравнения // *Моделирование и анализ информационных систем*. 2016. Том. 23, № 3. С. 247–257.
5. Быков А. А., Ермакова К. Е. Точные решения уравнений нестационарного фронта с точками равновесия дробного порядка // *ЖВМиМФ*. 2018. Том. 58, № 12. С. 1–16.
6. Быков А. А., Ермакова К. Е. Точные решения уравнений нестационарного фронта с точками равновесия бесконечного порядка вырождения // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 2018. № 6. С. 20–27.
7. Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н. Движение фронта в параболической задаче реакция – диффузия // *ЖВМиМФ*. 2010. Том. 50, № 2. С. 276–285.

**БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ДИСЛОКАЦИЙ
И ФЕРМИ–ПАСТА–УЛАМА**

**FAST-OSCILLATING SOLUTIONS OF EQUATIONS
WITH NONLINEARITIES OF DISLOCATIONS AND
FERMI–PASTA–ULAM**

С. Д. Глызин¹, С. А. Кащенко², А. О. Толбей³

¹ Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль, Россия; glyzin.s@gmail.com

² Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль, Россия; kasch@uniyar.ac.ru

³ Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль, Россия; a.tolbey@uniyar.ac.ru

Рассматриваются так называемые нерегулярные решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \ddot{y} + f(y) = & y(t, x + \varepsilon) - 2y + y(t, x - \varepsilon) + \\ & + \alpha(y^2(t, x + \varepsilon) - 2y(t, x + \varepsilon)y(t, x) + 2y(t, x) \cdot y(t, x - \varepsilon) - y^2(t, x - \varepsilon)) + \\ & + \beta((y(t, x + \varepsilon) - y(t, x))^3 - (y(t, x) - y(t, x - \varepsilon))^3), \quad y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x), \end{aligned} \quad (1)$$

формирующиеся на асимптотически высоких (при $\varepsilon \rightarrow 0$) модах. Краевая задача (1) представляет собой обобщение известного уравнения дислокаций [1] путем добавления нелинейности уравнения Ферми–Паста–Улома (ФПУ) (см. [2,3]). Нелинейную функцию $f(y)$ примем в виде $f(y) = ay + by^3 + \varphi(y)$, где $\varphi(y) = o(|y|^3)$ при $y \rightarrow 0$. Порядки малости величин a, b, α, β будем считать одинаковыми. Интересно отметить, что именно в этом случае нелинейность $f(y)$, характеризующая дислокации и нелинейность ФПУ будут вносить в нормальную форму задачи сопоставимый вклад.

Фиксируем произвольно параметр $\delta \neq 0$ и будем исследовать решения (1), формирующиеся на модах с номерами

$$k = \pm(2\delta\varepsilon^{-1} + \theta + m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

где $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1]$ дополняет слагаемое $2\delta\varepsilon^{-1}$ до целого.

Обозначим $\gamma^2(\delta, a_0) = 4 \sin^2(\delta) + a_0$. Тогда $\lambda_m = \pm i \left[\gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin(2\delta)}{\gamma^2(\delta)} \right) + o(\varepsilon^2) \right]$. Введем в рассмотрение функцию и формальный ряд

$$y_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) \exp \left(i \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta + m \right) x + i \gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin 2\delta}{2\gamma^2(\delta)} + o(\varepsilon^2) \right) t \right) + \\ + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m(\tau) \exp \left(i \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta + m \right) x - i \gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin 2\delta}{2\gamma^2(\delta)} + o(\varepsilon^2) \right) t \right) + \bar{c}c,$$

$$y = \varepsilon y_1(\tau, x, t) + \varepsilon^2 y_2(\tau, t, x) + \varepsilon^3 y_3(\tau, x, t) + \dots, \quad (3)$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, через $\bar{c}c$ обозначаются слагаемые, комплексно сопряженные к содержащимся в той же скобке, а y_i – периодически зависят от x и от t . Обозначим

$$\xi(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) \exp(imx), \quad \eta(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m(\tau) \exp(imx).$$

Подстановка (3) в (1) на каждом шаге исполнения алгоритма дает соответствующие краевые задачи для определения $y_i(\tau, t, x)$. При ε^2 получаем

$$y_2(\tau, t, x, \varepsilon) = A_{11} \xi^2 \exp(2i\varphi) + A_{22} \eta^2 \exp(2i\psi) + A_{12} \xi \eta \exp(i(\varphi + \psi)) + \bar{c}c,$$

$$\text{где } A_{11} = A_{22} = \frac{8i\alpha \sin(2\delta) \sin^2(\delta)}{3(a_0 + 4 \sin^2(\delta))}, \quad A_{12} = -\frac{16i\alpha \sin(2\delta) \sin^2(\delta)}{a_0 + 4 \sin^2(\delta)}, \\ \varphi = \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta \right) x + \gamma(\delta) \left(1 + \varepsilon \theta \gamma^{-2}(\delta) \frac{1}{2} \sin(2\delta) \right) t, \quad \psi = \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta \right) x - \\ \gamma(\delta) \left(1 + \varepsilon \theta \gamma^{-2}(\delta) \frac{1}{2} \sin(2\delta) \right) t.$$

При ε^3 получается задача для $y_3(t, \tau, x)$. В правой части соответствующего уравнения будут содержаться третьи и первые гармоники по φ и ψ . Учитывая, что первые гармоники являются резонансными, для данной задачи условия существования ограниченных решений выражаются следующей краевой задачей относительно ξ и η

$$L^+(\delta) \xi = 3\xi(|\xi|^2 + 2|\eta|^2) \cdot \left(\left[-6 + 2 \cos(2\delta) - \frac{\cos(4\delta)}{2} \right] \cdot \beta + b \right), \\ L^-(\delta) \eta = 3\eta(2|\xi|^2 + |\eta|^2) \cdot \left(\left[-6 + 2 \cos(2\delta) - \frac{\cos(4\delta)}{2} \right] \cdot \beta + b \right), \\ \xi(\tau, z_+ + 2\pi) \equiv \xi(\tau, z), \quad \eta(\tau, z_- + 2\pi) \equiv \eta(\tau, z). \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } L^+(\delta)\xi \stackrel{\text{def}}{=} 2i\gamma(\delta)\frac{\partial\xi}{\partial\tau} - a_1\xi - R(\delta) \cdot \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial z_+^2} + 2i\theta\frac{\partial\xi}{\partial z_+} - \theta^2\xi \right], \quad L^-(\delta)\eta \stackrel{\text{def}}{=} \\ -2i\gamma(\delta)\frac{\partial\eta}{\partial\tau} - a_1\eta - R(\delta) \cdot \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial z_-^2} + 2i\theta\frac{\partial\eta}{\partial z_-} - \theta^2\eta \right], \quad z_{\pm} = x \pm \gamma^{-1}(\delta)\frac{\sin(2\delta)}{2}t, \\ R(\delta) = \cos(2\delta) - \frac{1}{4}\gamma^{-2}(\delta)\sin^2(2\delta). \end{aligned}$$

Связь между решениями краевой задачи (4) и исходной краевой задачи (1) устанавливает следующее утверждение. В нем будет фигурировать последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, которая определяется условием $\theta(\varepsilon) = \theta_0$.

Теорема. *Зафиксируем произвольно параметры δ и $\theta_0 \in [0, 1)$. Пусть $\xi(\tau, z_+)$ и $\eta(\tau, z_-)$ — решения задачи (4) при $\theta = \theta_0$, ограниченные при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$. Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, определяемая условием $\theta(\varepsilon) = \theta_0$, что при $\varepsilon = \varepsilon_n$ краевая задача (1) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $\tilde{y}(t, x, \varepsilon_n)$, для которого имеет место представление (3)*

$$\tilde{y}(t, x, \varepsilon) = \varepsilon y_1(\tau, t, x) + \varepsilon^2 y_2(\tau, t, x) + \varepsilon^3 y_3(\tau, t, x).$$

Таким образом, краевая задача (4) играет роль нормальной формы для исходной краевой задачи (1) и определяет ее быстроосциллирующие по пространству решения.

³Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10043.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И., Конторова Т. А. К теории пластической деформации и двойникования : ч. I, II, III // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1938. Т. 8. 89–95(I), 1340–1348(II), 1349–1358(III).
2. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of Nonlinear Problems. I : Report LA-1940 / Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California. 1955. 21 p.
3. Kudryashov N. A. Analytical properties of nonlinear dislocation equation // Applied Mathematics Letters. 2017. Vol. 69. Pp. 29–34.

**ДВУХКЛАСТЕРНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В
ПОЛНОСВЯЗНЫХ ГЕННЫХ СЕТЯХ**
**TWO-CLUSTER SYNCHRONIZATION IN FULLY
COUPLED GENETIC NETWORKS**

С. Д. Глызин¹, А. Ю. Колесов², Н. Х. Розов³

¹Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль, Россия; kolesov@uniyar.ac.ru

²Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль, Россия; glyzin.s@gmail.com

³Московский государственный университет им. М.В.
Ломоносова, Москва, Россия; fpo.mgu@mail.ru

Для описания математической модели полносвязной осцилля-
торной генной сети в соответствии с [1] будем использовать систему

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + u_j^\gamma(t-h)} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \frac{\beta}{1 + u_s^\gamma(t-h)}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

в которой $u_j = u_j(t)$ — концентрация белка, соответствующего j -
ому гену-авторепрессору. Считаем, что эти авторепрессоры связаны
между собой по принципу ”каждый со всеми”. Кроме того, предпо-
ложим, что параметры α, β, γ, h положительны. Будем исследовать
вопрос об аттракторах системы (1) в случае, когда параметр γ ве-
лик, а остальные параметры имеют порядок единицы. Точнее гово-
ря, всюду ниже предполагаем, что

$$\gamma = 1/\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \beta > \alpha > 1, \quad (2)$$

Далее, выполним в системе (1) замены переменных $u_j = \exp x_j$, $j =$
 $1, 2, \dots, m$. В результате с учетом соотношений (2) она принимает
вид

$$\dot{x}_j = -1 + \exp(-x_j) \left(\frac{\alpha}{\Omega(x_j(t-h), \varepsilon)} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \frac{\beta}{\Omega(x_s(t-h), \varepsilon)} \right), \quad (3)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$, $\Omega(y, \varepsilon) = 1 + \exp(y/\varepsilon)$.

Ввиду сложности системы (3) ограничимся изучением специаль-
ных ее периодических решений — так называемых режимов двухкла-
стерной синхронизации.

Для описания упомянутых режимов фиксируем произвольно натуральное $k : 1 \leq k \leq m - 1$ и предположим, что совокупность индексов $1 \leq j \leq m$ разбита на два непересекающихся множества \mathcal{A} и \mathcal{B} , состоящих из k и $m - k$ элементов соответственно, т.е. $\{1, 2, \dots, m\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Тогда, очевидно, система (3) допускает решения с компонентами

$$x_j = v(t) \text{ при } j \in \mathcal{A}, \quad x_j = w(t) \text{ при } j \in \mathcal{B}, \quad (4)$$

где переменные v, w удовлетворяют вспомогательной системе

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -1 + \exp(-v) \left(\frac{\alpha_k}{\Omega(v(t-h), \varepsilon)} + \frac{\beta_{m-k}}{\Omega(w(t-h), \varepsilon)} \right), \\ \dot{w} &= -1 + \exp(-w) \left(\frac{\alpha_{m-k}}{\Omega(w(t-h), \varepsilon)} + \frac{\beta_k}{\Omega(v(t-h), \varepsilon)} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

в которой $\alpha_s = \alpha + (s - 1)\beta$, $\beta_s = s\beta$, $s = 1, 2, \dots, m$. Если же, в свою очередь, система (5) имеет неоднородное периодическое решение (для которого $v(t) \not\equiv w(t)$), то отвечающее ему решение (4) исходной системы (3) назовем периодическим режимом двухкластерной синхронизации. Тем самым проблема существования таких режимов сводится к отысканию неоднородных периодических решений системы (5), и справедливо следующее утверждение (см. также [2,3]).

Теорема 1. Пусть натуральное $k : 1 \leq k \leq m - 1$ произвольно фиксировано, параметры α, β удовлетворяют условию из (2), а для запаздывания h выполняется оценка

$$h < \ln(\beta_k/\alpha_k). \quad (6)$$

Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_k > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_k$ система (5) допускает экспоненциально орбитально устойчивый неоднородный цикл

$$C_k : \quad (v, w) = (v_k(t, \varepsilon), w_k(t, \varepsilon)), \quad (7)$$

компонента $v_k(t, \varepsilon)$ которого знакопеременна, а компонента $w_k(t, \varepsilon)$ строго положительна.

Цикл C_k порождает целое семейство периодических режимов двухкластерной синхронизации, задающихся равенствами (4), в которых $v(t) = v_k(t, \varepsilon)$, $w(t) = w_k(t, \varepsilon)$. Совокупность таких режимов

обозначим через \mathcal{U}_k и заметим, что их количество совпадает с количеством всевозможных разбиений на множества \mathcal{A} и \mathcal{B} , а значит, равно C_m^k .

Отметим два свойства системы (3). Во-первых, несложная проверка показывает, что она инвариантна относительно замен $(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})$, где (j_1, j_2, \dots, j_m) – произвольная перестановка набора индексов $(1, 2, \dots, m)$. Во-вторых, периодические режимы из семейства \mathcal{U}_k допускают кодирование с помощью символьных векторов вида

$$(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m) : \vartheta_j = a \text{ или } b, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Точнее говоря, предполагаем, что j -я координата вектора (8) равна a или b при $j \in \mathcal{A}$ или $j \in \mathcal{B}$ соответственно. В этом случае между векторами (8), содержащими k символов a и $m - k$ символов b , и циклами семейства \mathcal{U}_k имеет место взаимно однозначное соответствие. Таким образом любые два цикла из \mathcal{U}_k переходят друг в друга под действием указанных замен, а значит, имеют одинаковые свойства устойчивости. Это позволяет свести проблему устойчивости всех режимов семейства \mathcal{U}_k к исследованию устойчивости только одного цикла (4), соответствующего символьному вектору $(\underbrace{a, \dots, a}_k, \underbrace{b, \dots, b}_{m-k})$. На этом пути получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Периодические режимы семейства \mathcal{U}_k экспоненциально орбитально устойчивы при $k = 1$ и неустойчивы при $2 \leq k \leq m - 1$.*

Завершая описание основных результатов работы, добавим, что согласно (6) при условии $h < \ln(\beta_{m-1}/\alpha_{m-1})$ в системе (3) сосуществуют двухкластерные режимы всех семейств \mathcal{U}_s , $s = 1, \dots, m - 1$. Однако устойчивыми среди них являются лишь m циклов из \mathcal{U}_1 .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-29-10055).

ЛИТЕРАТУРА

1. Demidenko, G.V., Kolchanov, N.A., Likhoshvai, V.A., et al. Mathematical Modeling of Regulatory Circuits of Genetic Networks // Comp. Math. and Math. Phys. 2004. V. 44, No 12. P. 2166–2183.
2. Glyzin, S. D., Kolesov, A. Yu. and Rozov, N. Kh. Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons // Rus. Math. Surveys. 2015. V. 70, No 3. P. 383–452.
3. Glyzin, S. D., Kolesov, A. Yu. and Rozov, N. K. Buffering in cyclic gene networks // Theoretical and Mathematical Physics. 2016. V. 187, No 3. P. 935–951.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
ХАТЧИНСОНА С НЕПОСТОЯННЫМ
ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

RELAXATION SOLUTIONS OF HUTCHINSON
EQUATION WITH INCONSTANT DELAY

В. О. Голубенец

ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия;
golubenets2010@yandex.ru

Рассмотрим уравнение Хатчинсона с непостоянным запаздыванием

$$\dot{N} = \lambda N [1 - N(t - h(\lambda)) - f(N)],$$

где λ – достаточно большой параметр ($\lambda \gg 1$). Функция $h(\lambda)$ положительна и удовлетворяет условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = \ell \quad (0 \leq \ell < 1),$$

причем если $\ell = 0$, то $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda h(\lambda) / \ln \lambda = \infty$. Функция $f(N)$ положительна и достаточно гладкая при $N \geq 0$, монотонно убывает при $N > 0$, а также удовлетворяет равенствам

- $f(1) = 1 - \ell$;
- $\lim_{N \rightarrow \infty} f(N) = 0$.

Пространство $C([- \tau_0, 0])$, где $\tau_0 = f(0) + \sup_{\lambda \gg 1} h(\lambda)$, является фазовым для исходного уравнения.

Теорема 1. При сформулированных условиях на функции $h(\lambda)$ и $f(N)$ и при $\lambda \gg 1$ исходное уравнение имеет нелокальное релаксационное периодическое решение $N(t, \lambda)$ с начальным условием из выпуклого, ограниченного и замкнутого множества:

$$\{\varphi(t) \in C([- \tau_0, 0]), \quad e^{\lambda t} \leq \varphi(t) \leq e^{a \lambda t}, \quad \varphi(0) = 1\}, \quad a \in (0, 1).$$

Обозначим через $T(\lambda)$ период этого решения, а также введем следующие обозначения:

$$M(\lambda) = \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} N(t, \lambda), \quad m(\lambda) = \min_{0 \leq t \leq T(\lambda)} N(t, \lambda).$$

Положим также

$$d = \exp\left(-\frac{1}{a}\right).$$

Пусть $t_0(\lambda)$ – промежуток времени, за который решение $N(t, \lambda)$ изменяется от максимального значения $M(\lambda)$ до значения $N \equiv 1$.

Асимптотические свойства указанного периодического решения зависят от выбора конкретного вида функции $h(\lambda)$. Следующая теорема описывает эти зависимости.

Теорема 2. При $\lambda \gg 1$ выполнены неравенства:

$$M(\lambda) \geq d \exp(\lambda h(\lambda)),$$

$$m(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \left[-\frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda h(\lambda)) + 1 + \tau_0\right]\right),$$

$$T(\lambda) \geq \frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda h(\lambda)) - 1 - \tau_0.$$

Для всякого $0 < \delta < 1$ найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda > \lambda_0$ справедливо неравенство

$$t_0(\lambda) > 1 - \ell - \delta.$$

Доказательство приведенных теорем строится с помощью метода большого параметра.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-31-90082.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hale J. K. Theory of functional differential equations. Springer-Verlag, 1977.
2. Кащенко С. А. Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 3. С. 32.

**РЕЖИМЫ С САМООРГАНИЗАЦИЕЙ ОДНОГО
КЛАССА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ БИОФИЗИЧЕСКИХ
МОДЕЛЕЙ**

**SELF-ORGANIZATION MODES OF ONE CLASS OF
DISTRIBUTED BIOPHYSICAL MODELS**

В. Е. Горюнов

ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия; salkar@ya.ru

В популяционной биологии часто применяется логистическое уравнение с запаздыванием и диффузией, которое описывает изменение плотности численности популяции в некотором ареале при простейшем учете возрастной структуры. В работе рассматривается краевая задача следующего вида:

$$\dot{N} = D\Delta N + r \left[1 - \frac{1}{K} N_{t-1} \right] N, \quad \left. \frac{\partial N}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

где $N \equiv N(t, x)$ — плотность популяции в момент времени t в точке x выпуклой плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, D — коэффициент диффузии, r — мальтузианский коэффициент линейного роста, $N_{t-1} \equiv N(t-1, x)$, K — средняя численность популяции, ν — направление внешней нормали к границе $\partial\Omega$. Предполагается, что $K = 1$ и $\text{mes } \Omega = 1$. Первое равенство достигается путем замены переменной $N(t, x) \rightarrow KN(t, x)$, а второе — подходящей заменой пространственных переменных.

Относительно просто задача решается асимптотическими методами [1] при $r = \pi/2 + \varepsilon$ и $D = \varepsilon d$, где ε — положительный малый параметр. В этом случае удается найти критическое значение диффузии d_* , при котором пространственно однородный режим теряет устойчивость и от него ответвляются пространственно неоднородные режимы, которые имеют вид ведущих центров [2]. Отметим, что динамические свойства этих циклов (среднее, минимумы по времени и пространству, минимумы средних) остаются практически неизменными по сравнению с пространственно однородным режимом. Также некоторые результаты удается получить в случае, когда параметр r достаточно велик. В остальных ситуациях используются численные методы. С их помощью у краевой задачи (1) выделяются сосуществующие устойчивые режимы и вычисляются их динамические характеристики.

Для решения системы при $r = 3$ применялся метод Дормана–Принса пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования (DOPRI54). Квадратная область $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ покрывалась решеткой из 100×100 узлов. Таким образом, рассматривалась система из 10000 уравнений с запаздыванием и диффузионной связью.

Представляет интерес поиск решений задачи (1), минимум среднего по пространству у которых качественно отделен от нуля, поскольку в таком случае популяция не вымирает с течением времени, всегда сохраняя некоторый необходимый для дальнейшего существования запас особей.

Были обнаружены три разных типа устойчивых решений при значениях D , близких к критическому для $r = 3$ значению $D_* \approx 0.0373$, динамические характеристики которых существенно отличаются от пространственно однородного решения. Два из них являются периодическими, одно — двухчастотное, и каждое из них имеет симметричную пару. Причем один из таких режимов сосуществует с пространственно однородным режимом краевой задачи при четырехкратном превышении D_* . Минимум среднего по пространству этих режимов всегда отделен от нуля вследствие непрерывного перемещения популяции по области Ω , поэтому будем именовать решения такой структуры режимами самоорганизации [3].

Исследована трансформация режима ведущего центра при плавном уменьшении значения D , а также рассмотрен процесс перехода режима самоорганизации типа “вихрь” к классической спиральной волне.

Также изучены некоторые производные режимы сложной структуры при значении D , значительно ниже критического. Это режим «блуждающего ведущего центра», названный так из-за плавного циклического перемещения ведущего центра по одной из диагоналей рассматриваемой области, который является циклом с относительно большим периодом ($T \approx 116.81$ при $D = 0.0015$); режим двух однонаправленных пар согласованных вихрей — цикл с периодом $T \approx 3.239$ при $D = 0.005$; двухчастотный режим двух согласованных вихрей с разными направлениями вращения; многочастотный режим тройной спиральной волны. Отдельно по шагам разобран процесс генерации устойчивого режима, основанного на шестнадцати спиральных волнах.

Особо выделены три интервала сосуществования описанных ат-

тракторов — $D \in (0.0085, 0.0207)$, в котором сосуществуют шесть описанных в работе режимов, а также $D \in [0.0012, 0.002]$, в котором сосуществуют десять описанных режимов, и $D \in [0.0003, 0.0005]$, в котором сосуществуют шесть описанных режимов. Тем самым, в этих промежутках имеет место мультистабильность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10055).

ЛИТЕРАТУРА

1. Glyzin S., Goryunov V., Kolesov A. Spatially inhomogeneous modes of logistic differential equation with delay and small diffusion in a flat area // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V. 38, № 5. P. 898–905.
2. Кащенко С.А., Фролов В.Е. Асимптотика установившихся режимов конечно-разностных аппроксимаций логистического уравнения с запаздыванием и с малой диффузией // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 1. С. 94–114.
3. Колесов Ю.С., Майоров В.В. Пространственная и временная самоорганизация в одновидовом биоценозе // Динамика биологических популяций. Межвузовский сборник. Горький: изд. ГГУ. 1986. С. 3–13.

ОДНОМОДОВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В.В. БОЛОТИНА

ONE-MODE PERIODIC SOLUTIONS IN THE V.V. BOLOTIN'S MODEL PROBLEM

А. С. Запов

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль, Россия;
yar.promo.zapov.a@gmail.com

В работе будет рассмотрено дифференциальное уравнение с частными производными

$$w_{tt} + g_1 w_t + g_2 w_{txxxx} + w_{xxxx} - b w_{xx} + d w + c w_x = F(w_{xx}, w_x, w_{xt}) \quad (1)$$

вместе с краевыми условиями

$$\begin{aligned} w(t, x + 2\pi) &= w(t, x), w_x(t, x + 2\pi) = w_x(t, x), \\ w_{xx}(t, x + 2\pi) &= w_{xx}(t, x), w_{xxx}(t, x + 2\pi) = w_{xxx}(t, x), \end{aligned} \quad (2)$$

где $w = w(t, x)$ - функция, зависящая от пространственной переменной x и времени t . Нелинейность F будет выбрана следующим образом:

$$F(w_{xx}, w_x, w_{xt}) = \frac{q_1}{2\pi} w_{xx} \int_0^{2\pi} (w_x)^2 dx + \frac{q_2}{\pi} w_{xx} \int_0^{2\pi} w_{xt} w_x dx.$$

Наконец, $g_1, g_2, q_1, q_2, d, c, b$ - некоторые положительные постоянные. Основным параметр - это приведенная скорость набегающего потока газа (воздуха) c . В монографии [1] данная краевая задача (1), (2) предложена в качестве простейшей математической модели флаттера удлиненной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Отметим, что в монографии [1], а также в работе [2] она была изучена при дополнительном предположении, что $g_2 = 0$.

Для изучения вопроса об устойчивости нулевого состояния равновесия следует рассмотреть линеаризованный вариант краевой задачи (1), (2), который приводит к следующему утверждению.

Утверждение. Существует такое значение $c = c_* > 0$, что при $c < c_*$ нулевое состояние краевой задачи (1), (2) асимптотически устойчиво, а при $c > c_*$ теряет свою устойчивость. При этом, если $c = c_*$, то реализуется критический случай в задаче об устойчивости. При этом

$$c_* = \min c_n, c_n = \frac{g_1 + g_2 n^4}{n} \sqrt{n^4 + b n^2 + d}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Отметим, что при $g_2 = 0$ последовательность c_n достигает своего минимума на номере $n = n_0$ (и, конечно же, $n = -n_0$), где n_0 , в свою очередь, равно одному из двух значений: j_0 , либо $j_0 + 1$, где $j_0 = \text{entier}(\sqrt[4]{d})$. Если при этом значение d достаточно мало, то, очевидно, что $n_0 = 1$. Аналогичный факт имеет место при малых d , если $g_2 > 0$. В остальных случаях требуется более детальный анализ.

Предположим, что $w = w(t, x)$ - решение данной краевой задачи (1), (2). Тогда такое решение можно представить в виде ряда

$$w(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(t) \exp(inx). \quad (3)$$

В свою очередь, коэффициенты ряда (3) удовлетворяют следующей

бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_n'' + G_n w_n' + (K_n + icn)w_n = -n^2 \left(q_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 |w_m|^2 + q_2 \frac{d}{dt} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 |w_m|^2 \right) w_n, \quad (4)$$

где $w_n = \bar{w}_n, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Система (4) может иметь решение следующего вида:

$$w_k = \eta_k \exp(i\omega_k t), \quad w_{-k} = \eta_k \exp(-i\omega_k t), \quad \omega_k \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

а $w_n = 0$, если $n \neq k$. Без нарушения общности можно считать, что $\eta_k > 0$. После подстановки функций (5) в уравнение (3) получим уравнение для определения ω_k и η_k :

$$-\omega_k^2 + (g_1 + g_2 k^4) i \omega_k + (k^4 + b k^2 + d + i c k) = -2k^4 q_1 |\eta_k|^2, \quad |\eta_{-k}| = |\eta_k|,$$

откуда следует, что

$$\omega_k = -\frac{kc}{g_1 + g_2 k^4}, \quad \eta_k^2 = \frac{1}{2k^2 q_1} \cdot \frac{1}{(g_1 + g_2 k^4)^2} (c^2 - c_k^2),$$

где $c_k^2 = \frac{(g_1 + g_2 k^4)^2}{k^2} (k^4 + b k^2 + d)$.

Теорема 1. Пусть $c > c_k$. Тогда краевая задача (1), (2) имеет автомодельное периодическое решение

$$w_k(t, x) = \eta_k (\exp(i\omega_k t + ikx + i\phi_k) + \exp(-i\omega_k t - ikx - i\phi_k)), \quad (6)$$

где ϕ_k - произвольное действительное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Город: М.: Наука, 1961.
2. Куликов А. Н. Аттракторы одной нелинейной краевой задачи, встречающейся в теории аэроупругости // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 3, № 37. С. 397–401.

**ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО СОСТОЯНИЯ
РАВНОВЕСИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ С ОТКЛОНЕНИЕМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ**
**STABILITY LOSS OF ZERO BALANCE STATE OF
NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH
DEVIATE IN BOUNDARY CONDITION**

Л. И. Ивановский

ЯрГУ им. П.Г Демидова, Ярославль, Россия;
`leon19unknown@gmail.com`

Рассмотрим нелинейную краевую задачу с отклонением в краевом условии:

$$\dot{u} = u'' + \gamma u - u^3, \quad (1)$$

$$u'(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = \alpha u(0, t), \quad (2)$$

где $u = u(x, t)$ – гладкая функция при $t \geq 0$ и $x \in [0, 1]$, а параметры $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

Представляет интерес ситуация, когда нулевое решение теряет свою устойчивость. Это может происходить одним из двух способов: дивергентным, когда среди всевозможных собственных значений имеется нулевое значение, или колебательным, соответствующим случаю выхода пары собственных значений с максимальной действительной частью на мнимую ось. Задача исследования состояла в изучении свойств потери устойчивости нулевого решения краевой задачи (1), (2), т.е. в поиске критических значений параметров α и γ и построении асимптотических формул для режимов, от него ответвляющихся.

Поскольку получить нужные критические значения параметров с использованием одного лишь аналитического аппарата довольно затруднительно, исследование осуществлялось численно. В результате были выявлены критические зависимости параметров α, γ , для которых нулевое решение краевой задачи (1), (2), дивергентно или колебательно теряет устойчивость. При значениях параметра α , близких к критическим, была построена нормальная форма и на ее основе были определены условия появления неоднородных состояний равновесия в одном случае и циклов в другом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gourley S. A., So J. W.-H., Ju J. H. Nonlocality of Reaction-Diffusion Equations Induced by Delay: Biological Modeling and Nonlinear Dynamics // Journal of Mathematical Sciences. 2004. V. 4, № 4. P. 5119–5153.

ДИНАМИКА ДВУХ СЛАБО СВЯЗАННЫХ
ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ
ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ВЕЛИЧИНЕ СВЯЗИ
DYNAMICS OF TWO WEAKLY COUPLED
OSCILLATORS WITH DELAY FOR VARIOUS
COUPLING STRENGTH

А. А. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль, Россия; sa-ahr@yandex.ru

Рассмотрим систему двух дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 + u_0 &= \lambda F(u_0(t - T)) + \gamma(u_1 - u_0), \\ \dot{u}_1 + u_1 &= \lambda F(u_1(t - T)) + \gamma(u_0 - u_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u_i ($i = 0, 1$) — действительные функции, параметры T , λ и γ положительные. Мы предполагаем, что гладкая нелинейная функция $F(u)$ является финитной, то есть для некоторого $p > 0$ имеем $F(u) \equiv 0$ при $|u| \geq p$, а внутри отрезка $u \in [-p, p]$ потребуем, чтобы функция $F(u)$ удовлетворяла следующим условиям

$$\begin{cases} F(u_*) \neq 0 \text{ кроме конечного числа точек,} \\ \text{если } F(u_*) = 0, \text{ то } F'(u_*) \neq 0 \text{ или } F''(u_*) \neq 0. \end{cases}$$

Ключевым предположением работы является то, что положительный параметр λ является большим, а коэффициент связи γ является малым

$$\lambda \gg 1, \quad 0 < \gamma \ll 1.$$

В работе изучается зависимость нелокальной динамики модели (1) от величины параметра связи γ . С этой целью рассматриваются

четыре случая

- 1) $\gamma = \gamma_1 (\ln \lambda)^{-1}$,
- 2) $\gamma = \gamma_1 (\ln \lambda)^{-1} \lambda^{-\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1/2$,
- 3) $\gamma = \gamma_1 \lambda^{-\alpha}$, $1/2 < \alpha < 1$,
- 4) $\gamma = \gamma_1 \lambda^{-1}$,

где γ_1 — положительная константа.

В каждом из случаев мы изучаем вопросы существования и устойчивости релаксационных циклов исходной системы. С помощью специального метода большого параметра изучение динамики исходной бесконечномерной системы сводится к изучению динамики построенного трехмерного отображения (см., например, [1]). Грубым циклам построенного отображения соответствуют релаксационные циклы исходной системы той же устойчивости.

В первом, втором и четвертом случаях построенные отображения могут иметь несколько сосуществующих грубых циклов, а в третьем случае все решения построенного отображения являются негрубыми циклами. Таким образом, в первом, втором и четвертом случаях при подходящем выборе функции F в системе (1) наблюдается мультистабильность. В работе найдена асимптотика решений исходной системы, а также показано, что величина всплесков и период полученных решений во всех четырех случаях различны.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10055.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kashchenko A. A.* Multistability in a system of two coupled oscillators with delayed feedback // *Journal of Differential Equations*. 2019. V. 266, № 1. P. 562–579.

ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ЛОГИСТИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ
THE LOCAL DYNAMICS OF LOGISTIC EQUATION
WITH DELAYS

И. С. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия; iliyask@uniyar.ac.ru

Логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{N(t-T)}{K} \right] N$$

хорошо описывает динамику изменения численности простейших популяций, обитающих в однородной среде. Здесь $N > 0$ нормированная численность, $r > 0$ мальтузианский коэффициент, $T > 0$ время запаздывания (возраст половозрелости), K – средняя численность популяции, обусловленная емкостью среды.

В этом уравнении учитывается лишь возраст половозрелости T , однако вклад в изменение численности популяции для возрастных групп, перешедших этот возраст, может быть различным. Для учета возрастной структуры рассмотрим более сложное уравнение с двумя запаздываниями

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{\alpha_1 N(t-T_1) + \alpha_2 N(t-T_2)}{K} \right] N,$$

где $T_1 > T_2 > 0$, а весовые коэффициенты $\alpha_1 \geq 0$ и $\alpha_2 \geq 0$ определяют вклад соответствующей возрастной группы, причем $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Положим

$$a = -\alpha_1^{-1} \alpha_2 < 0.$$

Тогда с помощью нормирующих замен $r \rightarrow r(1-a)T_1^{-1}$, $t \rightarrow T_1 t$ и замен $N = K(1+u)$ и $H = T_2 T_1^{-1} < 1$ приходим к уравнению

$$\dot{u} = r[au(t-1) - u(t-H)](1+u). \quad (1)$$

Это уравнение имеет нулевое решение, которое соответствует решению $N \equiv K$. Изучим поведение всех его решений с начальными

условиями (в пространстве $C_{[-1,0]}$) из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Основное предположение работы состоит в том, что параметр r является достаточно большим: $r \gg 1$. Удобно ввести обозначение $\varepsilon = r^{-1}$. Тогда $0 < \varepsilon \ll 1$.

При фиксированных значениях a и H и при достаточно малых ε характеристическое уравнение

$$\varepsilon\lambda + \exp(-\lambda H) = a \exp(-\lambda).$$

имеет корень с положительной (и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$) вещественной частью, т. е. нулевое состояние равновесия в (1) неустойчиво и задача о поведении его решений в окрестности нуля является нелокальной. В связи с этим будем рассматривать только малые значения параметра H : $H = \varepsilon h$.

Показано [1], что при $h > \pi/2$ изучаемое состояние равновесия неустойчиво, а при $0 < h \leq \pi/2$ найдется такое $a_0 = a_0(h)$, что при $|a| < a_0$ решение $u \equiv 0$ асимптотически устойчиво и все решения из некоторой достаточно малой, но фиксированной при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же $|a| > a_0$, то нулевое решение при этом условии неустойчиво и задача о динамике решений становится нелокальной.

Отсюда вытекает, что в рассмотрении нуждается случай, когда параметр a близок к $\pm a_0(h_0)$ при h близком к $h_0 \in (0, \pi/2]$. В связи с этим ниже полагаем, что для некоторых фиксированных значений a_1 и h_1 имеет место представление

$$h = h_0 + \varepsilon^\alpha h_1, \quad a = \pm a_0(h_0) + \varepsilon^\alpha a_1, \quad \alpha > 0$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, и нет корней с положительной и отделенной от нуля вещественной частью.

Сделаем несколько обозначений. Пусть ω_0 – это точка минимума функции $1 + \omega^2 - 2\omega \sin \omega h$, а $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ дополняет до кратного 2π величину $\omega_0 \varepsilon^{-1}$.

Рассмотрим комплексное параболическое уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left(2id(\theta + \varphi) \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(b + d(\theta + \varphi)^2 \right) \xi + \sigma \xi |\xi|^2,$$

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (2)$$

Здесь параметры d, b, φ, σ определяются коэффициентами исходной задачи ($Re d > 0$). Точные значения коэффициентов см. в [1]. В рассматриваемом случае справедлива следующая теорема.

Теорема. [1] Пусть $\xi_0(\tau, x)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty, x \in [0, 1]$ решение краевой задачи (2) при $\theta = \theta_* \in [0, 2\pi)$. Пусть стремящаяся к нулю последовательность ε_n такова, что $\theta(\varepsilon_n) = \theta_*$. Тогда уравнение (1) при $\varepsilon = \varepsilon_n$ имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^3)$ равномерно по всем $t \geq 0$ решение $u_0(t, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon \left[\xi_0(\varepsilon^2 t, (1 + O(1))t) \exp(i\omega_0 \varepsilon^{-1} t) + \bar{\xi}_0(\varepsilon^2 t, (1 + O(1))t) \exp(-i\omega_0 \varepsilon^{-1} t) \right] +$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ выражение $\theta = \theta(\varepsilon)$ принимает каждое значение из промежутка $[0; 2\pi)$ бесконечное количество раз, а следовательно вид решений (2) и их устойчивость могут меняться бесконечное количество раз. Это позволяет сделать вывод о возможности бесконечного процесса прямых и обратных бифуркаций в (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Например, это могут быть бифуркации рождения и гибели устойчивого цикла в результате супер- и субкритических бифуркаций Андронова-Хопфа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10043.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кащенко И. С., Кащенко С. А. Динамика уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего численность популяции // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 2. С. 21–38

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ
МОДЕЛИ ОПТОЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА
THE STUDY OF LOCAL DYNAMICS IN AN
OPTOELECTRONIC OSCILLATOR MODEL

И. С. Кащенко¹, И. Н. Маслеников²

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия; igor.maslenikov16@yandex.ru

²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия; iliyask@uniyar.ac.ru

Рассмотрим модель оптоэлектронного осциллятора, описываемого дифференциально-интегральным уравнением с запаздыванием, которое представляет собой реализацию модифицированного уравнения Икеды с задержкой по времени [1]:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + x + \delta \int_{t_0}^t x(s) ds = \beta_1 F(x(t - \tau)).$$

Эта задача сводится к уравнению второго порядка с запаздыванием

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \delta y = \beta_1 F\left(\frac{dy}{dt}(t - \tau)\right). \quad (1)$$

Как и в [1], будем считать, что параметры ε и δ малы и пропорциональны:

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad \delta = k\varepsilon.$$

Характеристический квазиполином линеаризованной в нуле задачи имеет вид

$$\varepsilon \lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda \beta e^{-\lambda}.$$

Показано, что при $|\beta| < 1$ нулевое состояние равновесия устойчиво, а при $|\beta| > 1$ – неустойчиво. В критических случаях $\beta = \pm 1$ характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом критические случаи имеют бесконечную размерность.

Для исследования поведения решений в случае $\beta = \pm 1$ построены квазинормальные формы – специальные нелинейные уравнения параболического типа, не содержащие малых параметров, решения

которых дают главную часть асимптотических по невязке равномерно по $t \geq 0$ решений уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Larger L., Maistrenko Y., Penkovskiy B.. Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems// Physical Review Letters, 2013. Vol. 111. pp. 054103.

ДИНАМИКА ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ШРЕДИНГЕРОВСКОГО ТИПА THE DYNAMICS OF TWO-COMPONENT PARABOLIC SCHROEDINGER TYPE SYSTEM

С. А. Кащенко

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия;*

*Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ», Москва, Россия;*

kasch@uniyar.ac.ru

Рассматривается вопрос о динамических свойствах решений с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия уравнений и систем уравнений параболического типа, близких к уравнениям Шредингера. Наиболее ярким представителем такого класса уравнений является уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (id_0 + \varepsilon d_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (b_0 + \varepsilon b_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (ia_0 + \varepsilon a_1) u + \gamma u |u|^2 \quad (1)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр: $0 < \varepsilon \ll 1$; коэффициенты d_0, b_0, a_0 вещественны, а для коэффициента d_1 выполнено условие $Re d_1 > 0$, которое говорит о том, что краевая задача (1), (2) имеет параболический тип. Отметим, что параметры b_0 и a_0 здесь можно считать нулевыми, т.к. они уничтожаются простыми заменами $x \rightarrow x + b_0 t$ и $u \rightarrow u \exp(ia_0 t)$.

Существенно более сложное поведение решений наблюдается у другого уравнения шредингеровского типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (id_0 + \varepsilon d_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (b_0 + \varepsilon b_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (ia_0 + \varepsilon a_1) u + \gamma_1 u^2 + \gamma_2 u^3 + \gamma u |u|^2 \quad (\text{Im} d_0 = 0), \quad (3)$$

которое тоже будем рассматривать с периодическими краевыми условиями (2). Вещественный параметр b_0 и здесь можно считать равным нулю, а параметр a_0 уже «убрать» нельзя.

Обратим внимание на весьма важное обстоятельство. Все собственные значения характеристического уравнения для линеаризованных в нуле краевых задач (1), (2) и (3), (2) при $\varepsilon = 0$ являются чисто мнимыми. Отсюда, в частности, следует, что в задаче об устойчивости их нулевого состояния равновесия реализуется критический случай бесконечной размерности.

Наиболее общие двухкомпонентные системы, которые будем называть системами шредингеровского типа, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (D_0 + \varepsilon D_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_0 + \varepsilon B_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (A_0 + \varepsilon A_1) u + F(u), \quad (4)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (5)$$

Здесь все компоненты в (4) вещественные, $u = (u_1, u_2)$; D_j, B_j, A_j ($j = 0, 1$) — постоянные 2×2 -матрицы, а нелинейная вектор-функция $F(u)$ является достаточно гладкой и имеет в нуле порядок малости выше первого. Удобно считать, что

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + o(|u|^4),$$

где вектор-функции $F_j(*, \dots, *)$ линейны по каждому аргументу. Условие параболичности краевой задачи (4), (5) означает, что собственные значения матрицы $D_0 + \varepsilon D_1$ имеют положительные вещественные части (при $0 < \varepsilon \ll 1$). Отсюда, например, получаем, что собственные значения матрицы D_0 имеют неотрицательные вещественные части.

Предложен алгоритм нормализации, т. е. сведения исходной системы к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся амплитуд. Выделены ситуации, когда соответствующие системы удается компактно записать в виде

краевых задач со специальными нелинейностями. Эти краевые задачи играют роль нормальных форм для исходных параболических систем. Их нелокальная динамика определяет поведение решений исходной системы с начальными условиями из некоторой достаточно малой и независимой от малого параметра окрестности состояния равновесия. В качестве важных приложений рассмотрены скалярные комплексные параболические уравнения шредингеровского типа.

ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ В ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

LOCAL BIFURCATIONS IN ONE FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

А. М. Ковалева

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия; anastasia2kovaleva@gmail.com*

В работе рассматривается математическая модель, описывающая процесс формирования рельефа на поверхности полупроводников под влиянием потока ионов [1, 2]. Данный технологический процесс применяется в нанoeлектронике, в том числе при создании микропроцессоров. Изучаемая математическая модель основана на идеях нелокальной модели эрозии [3, 4] и модели Бредли–Харпера. Модель Бредли–Харпера [1, 2] является традиционной математической моделью данного технологического процесса и использует различные модификации широко известного уравнения Курамото–Сивашинского [5, 6].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - cw_x + c_1 w_x^2. \quad (1)$$

В уравнении (1) $w(t, x) = u(t, x - h)$, h — пространственное отклонение, а параметр $c > 0$.

Дополним задачу периодическим краевым условием

$$u(t, x) = u(t, x + 2\pi) \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \quad (3)$$

Пусть $f(x) \in Q_2(\delta)$ достаточно малому шару гильбертова пространства \mathbb{H}_2^2 (пространство Соболева 2π периодических функций, имеющих интегрируемые с квадратом обобщенные производные до второго порядка включительно). Такое условие позволяет утверждать, что поставленная смешанная задача (1) – (3) локально корректно разрешима.

Для краевой задачи (1), (2) изучен вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений. Поставленная краевая задача рассматривалась при двух значениях пространственного отклонения $h = \pi/2$, $h = \pi/3$.

Для однородных состояний равновесия был рассмотрен вопрос о возможности реализации критических случаев в задаче об устойчивости. К случае близком к критическому пары простых чисто мнимых собственных значений было показано, что краевая задача (1) – (2) имеет периодические решения второго рода по переменной t , которые также зависят от x . Аналогичный результат получен в случае близком к критическому двукратного нулевого собственного значения. В работе была изучена и бифуркационная краевая задача коразмерности два в ситуации близкой к критическому случаю двух пар чисто мнимых собственных значений. Отметим, что в данной задаче однородным состояниям равновесия могут соответствовать как периодические решения второго рода, так и квазипериодические решения второго рода.

Для решения поставленных бифуркационных задач использовались метод нормальных форм Пуанкаре–Дюлака, метод интегральных многообразий и асимптотические формулы. В работе изучен вопрос об устойчивости однородных состояний равновесий, были получены асимптотические формулы пространственно неоднородных решений и условия их устойчивости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 18-01-00672), проекта № 1.5722.2017/8.9 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bradley R. M., Harper J. M. F. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Sci. Technol. A. 1988. V. 6, № 4. pp. 2390–2395.

2. *Sigmund P.* A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment // *J. Mat. Sci.* 1973. V. 8. 1545 p.
3. *Bachurin V.I., Rudy A.S., Smirnov V.K.* Nanoscale Model of Surface Erosion by Ion Bombardment // *Radiation Effects and Defects in Solids.* 2006. V. 161, № 6. pp. 319–329.
4. *Рудый А. С., Бачурин В. И.* Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // *Известия РАН, Серия физическая.* 2008. Т. 72, № 5. С. 624–629.
5. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984.
6. *Syvashinsky G. I.* Weak Turbulence in Periodic Flow // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1985. V. 17, № 2. pp. 243–255.

ОБ ОДНОЙ ПЕРСПЕКТИВНОЙ НЕЙРОСЕТЕВОЙ МОДЕЛИ

ABOUT THE ONE PERSPECTIVE NEURAL NETWORK MODEL

Е. В. Коновалов

*Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль, Россия; kinnarts@mail.ru*

В работах [1]–[2] введена нейросетевая модель, названная модифицированной сетью обобщенных нейронных элементов (МОНЭ-сетью). Эта модель относится к биологически ориентированным детерминированным нейросетевым моделям непрерывного типа. В основу модели положен сравнительно простой закон изменения мембранного потенциала экспоненциально-асимптотического типа для каждого нейрона сети.

Рассмотрим МОНЭ-сеть из N нейронов с параметрами p, r, α, T_R , а также двумя матрицами: $W = (w_{ij})_{i=1, j=1}^{N, N}$ ($w_{ij} \in 0 \cup \mathfrak{R}^+$) и $M = (m_{ij})_{i=1, j=1}^{N, N}$ ($m_{ij} \in 0, 1$). Поведение произвольного k -го нейрона МОНЭ-сети определяется двумя функциями $S^k(t)$ ($S^k(t) \in \{0, 1\} \forall t \forall k$) и $U^k(t)$ ($-1 \leq U^k(t) \leq p \forall t \forall k$). Первая из них задает состояние нейрона (рефрактерность или восприимчивость), вторая — мембранный потенциал.

Начальное состояние МОНЭ-сети определяется величинами $S^k(0) = \{0, 1\}$ и $U^k(0)$ ($k = 1, \dots, N$). Динамика МОНЭ-сети определяется наступлением 0-событий и p -событий для различных нейронов в различные моменты времени t так, как это описано в [2].

Биологическим их смыслом являются выход из состояния рефрактерности и генерация спайка. В зависимости от типа события для данного k -го элемента изменяется состояние $S^k(t)$, а также элементы матрицы M , которая определяет взаимное влияние элементов друг на друга в каждый текущий момент времени t . Матрица W содержит синаптические веса связей между элементами и не меняется во время работы сети.

В основе динамики нейронов лежит дифференциальное уравнение

$$\dot{U}^k = \alpha \left(r + \sum_{i=1}^N m_{ik} w_{ik} - U^k \right)$$

с начальным условием $U^k(t_0) = U^k(0) = U_0^k$. Этому уравнению удовлетворяет функция мембранного потенциала U^k для каждого k -го нейрона МОНЭ-сети в состоянии восприимчивости.

Элементы МОНЭ-сети близки по своему поведению к обобщенным нейронным элементам, введенным в [3]–[4]. Для сетей, собранных из обобщенных нейронных элементов, удалось получить ряд важных результатов. А именно, существование устойчивых колебательных режимов нейронной активности в кольцевых структурах [5], устойчивый колебательный режим поведения нейронного элемента под действием периодических пачек импульсов [6], возможность подстройки синаптических весов (адаптации) как у отдельного элемента, так и в кольцевых структурах [4]. Устойчивость фазовых рассогласований между импульсами оказалась функционально взаимосвязана со значениями синаптических весов связей между элементами. Это представляется особенно ценным в связи с фазово-частотной гипотезой организации памяти в нейронных ансамблях.

Наконец, в [2] показана эквивалентность динамики двух нейронных сетей: МОНЭ-сети и сети того же размера, собранной из обобщенных нейронных элементов. Это позволяет перенести все полученные результаты на более простые в описании МОНЭ-сети.

Детерминированный характер поведения нейронов и сравнительно простой закон изменения их мембранных потенциалов позволяет работать с большими МОНЭ-сетями как на цифровых ЭВМ (при помощи имитирующего алгоритма), так и на нейрокомпьютерах. Отдельные элементы рассмотренной сети, в зависимости от соотношения параметров p и r , могут вести себя как нейроны-детекторы или же как нейроны автогенераторного типа. Следовательно, МОНЭ-

сеть обладает универсальностью в указанном смысле. Наконец, различные по структуре МОНЭ-сети способны породить сложные устойчивые колебательные режимы (аттракторы) нейронной активности. Эти режимы могут быть исследованы как численными, так и аналитическими методами, что затруднительно сделать для сложных биологически адекватных нейронных моделей. С другой стороны, популярные нейросетевые модели дискретного типа (персептроны, сети Хопфилда, карты Кохонена и др.) не демонстрируют по-настоящему сложного поведения, присущего биологическим нейронным сетям. Все это означает перспективность дальнейших исследований рассмотренной нейросетевой модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коновалов Е. В. Модифицированная сеть обобщенных нейронных элементов // Нелинейные методы в физике и механике: Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферми-Паста-Улама: Тезисы докладов. – Ярославль: ЯрГУ. 2015. С. 46–49.
2. Коновалов Е. В. Эквивалентность обычной и модифицированной сети обобщенных нейронных элементов // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. № 3. С. 656–665.
3. Майоров В. В., Коновалов Е. В. Обобщенный нейронный автомат в задаче распространения волны возбуждения по нейронной сети // Нейрокомпьютеры: Разработка, применение. 2007. № 7. С. 3–8.
4. Коновалов Е. В. Задача адаптации обобщенного нейронного элемента // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. № 1. С. 69–83.
5. Коновалов Е. В. Устойчивый колебательный режим в нейронной сети обобщенных нейронных автоматов-детекторов // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. № 2. С. 30–35.
6. Коновалов Е. В. Задача о пачечном воздействии на обобщенный нейронный автомат // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. № 3. С. 43–49.

**ВЛИЯНИЕ МЕМРИСТОРНОЙ СВЯЗИ НА
ДИНАМИКУ АНСАМБЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ
ФИТЦХЬЮ-НАГУМО**

**EFFECTS OF MEMRISTOR-BASED COUPLING IN THE
ENSEMBLE OF FITZHUGH-NAGUMO ELEMENTS**

А. Г. Коротков¹, А. О. Казаков², Т. А. Леванова³

¹Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия; koralg81@gmail.com

²Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Нижний Новгород, Россия; akazakov@hse.ru

³Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;
tatiana.levanova@itmm.unn.ru

В работе изучены эффекты, возникающие в результате добавления электрических синапсов и мемристорных связей в ансамбль нейроноподобных элементов с химическими синаптическими связями. Индивидуальный элемент ансамбля описывается системой ФитцХью-Нагумо. Модель ансамбля двух нейроноподобных элементов, взаимодействующих посредством химических, электрических и/или мемристорных связей, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x}_1 = x_1 - x_1^3/3 - y_1 + I(\phi_2) + \rho(z) \cdot (x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 - a \\ \epsilon \dot{x}_2 = x_2 - x_2^3/3 - y_2 + I(\phi_1) + \rho(z) \cdot (x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 - a \\ \dot{z} = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x_i ($i \in \{1, 2\}$) – одномерные переменные, которые описывают динамику мембранного потенциала i -го элемента, y_i – переменные восстановления, которые задают медленную отрицательную обратную связь для i -го элемента, ϵ – малый параметр ($0 < \epsilon \ll 1$). Функция $I(\phi) = \frac{g}{1 + e^{k(\cos(\delta/2) - \cos(\phi - \alpha - \delta/2))}}$, где $\phi = \arctan \frac{y}{x}$, задаёт химические синаптические связи между элементами, параметр g задаёт силу связи. Функция $\rho(z) = k_1 + k_2 z^2$ с параметрами k_1 и k_2 используется для задания мемристорных связей. В работе зафиксированы следующие значения параметров: $a = -1.01$, $\epsilon = 0.01$, $k = 50$, $g = 0.1$, $\delta = 50^\circ$.

В работе [1] было показано наличие в ансамбле элементов ФитцХью-Нагумо без электрических и мемристорных связей синфазного и противофазного режимов (их образцами являются предельные циклы L_{in} и L_{anti} , соответственно), а также режимов последовательной активности различных типов (предельные циклы L_{12} и L_{1221}).

В работе показано, что параметры k_1 и k_2 не влияют на цикл L_{in} , поскольку исходная система в условиях синфазного цикла не зависит от указанных параметров. С помощью численного анализа было показано, что они также не влияют на его устойчивость.

С помощью однопараметрического бифуркационного анализа для режима противофазной спайковой активности было показано, что соответствующий ему предельный цикл L_{anti} существует для $k_1 \leq k_{SN} \approx 0.04$. При $k_1 = k_{SN}$ цикл L_{anti} претерпевает седло-узловую бифуркацию, в результате чего траектории из его окрестности стремятся к предельному циклу L_{in} .

При увеличении значения параметра k_1 циклы L_{12} и L_{1221} становятся почти синфазным (разность фаз близка к нулю), но при этом хаотическими. При стремлении k_1 к некоторому значению $k_1^* \approx 0.097$ межспайковые интервалы стремятся к бесконечности.

При увеличении k_2 противофазный цикл испытывает каскад бифуркаций удвоения, образуется странный аттрактор (колебания при этом становятся почти синфазными), который при $k_2 \approx 0.0102$ претерпевает кризис и все траектории из окрестности аттрактора уходят на устойчивый синфазный предельный цикл. Влияние параметра k_2 на циклы L_{12} и L_{1221} схоже: оба эти цикла становятся почти синфазными (разность фаз близка к нулю).

В работе продемонстрировано, что из цикла L_{12} при $k_1 \approx 0.094$ и $k_2 \approx 42$ образуется хаотический аттрактор, который является математическим образом каких-либо экстремальных событий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 18-29-10081.

ЛИТЕРАТУРА

1. Korotkov A. G., Kazakov A. O., Levanova T. A., Osipov G. V. The dynamics of ensemble of neuron-like elements with excitatory couplings // Communications in nonlinear science and numerical simulation. 2019. V. 71. P. 38–49.

ОБОБЩЁННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ

GENERALIZED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS FOR DESCRIPTION OPTICAL SOLITONS

Н. А. Кудряшов

Национальный исследовательский ядерный университет
"МИФИ", Москва, Россия; nakudr@gmail.com

В последние годы в связи с интенсивным развитием волоконной оптики для описания процессов распространения оптических солитонов предложено целый ряд нелинейных уравнений в частных производных, которые по своей сути являются обобщением хорошо известного нелинейного уравнения Шредингера. Приведём список наиболее популярных уравнений, которые изучаются в настоящее время и о которых пойдёт речь в докладе.

1. Уравнение Радхакришнана-Кунду-Лакшманнана

$$i u_t + a u_{xx} + b |u|^2 u = i \alpha (|u|^2 u)_x - i \beta u_{xxx}, \quad (1)$$

где a , b , α , β – параметры уравнения.

2. Уравнение Трики-Бисваса [1]

$$u_t + i a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} (|u|^{2n} u) = 0. \quad (2)$$

3. Нелинейное уравнение Шредингера с анти-кубической нелинейностью [2]

$$q_t + i a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + (b |q|^{-4} + c |q|^2 + d |q|^4) q = 0, \quad (3)$$

где a , b , c and d – параметры уравнения.

4. Уравнение Кунду-Мукери-Наскара [3]

$$i q_t + a q_{xy} + i b q (q q_x^* - q^* q_x) = 0, \quad (4)$$

где $q(x, y, t)$ – функция профиля оптического солитона, a и b – параметры уравнения.

5. Возмущенное уравнение Чена-Ли-Лу [4]

$$i q_t + a q_{xx} + i b (|q|^2 q_x) = i [\alpha q_x + \lambda (|q|^2 q)_x + \beta (|q|^2)_x q]. \quad (5)$$

Здесь $q(x, t)$ – функция профиля волны, a, b, α, λ и β – параметры уравнения.

6. Обобщенное нелинейное уравнение Шредингера с квантово-кубической нелинейностью [5]

$$i q_t + a q_{xx} + (b |q|^2 + c |q|^4) q + h |q^2|_{xx} q = 0, \quad (6)$$

где a, b, c и h – параметры математической модели.

7. Обобщенная модель для описания оптических солитонов [6]

$$i q_t + a q_{xx} + (b |q|^{2n} + c |q|^n + g |q|^{-n} + h |q|^{-2n}) q = 0. \quad (7)$$

8. Уравнения для описания оптических солитонов с большой дисперсией [7]

$$i q_t + \alpha q_{xx} + i \beta q_{xxx} + \chi q_{xxxx} + i \delta q_{xxxxx} + \gamma q_{xxxxxx} + \\ + \mu |q|^2 q + \nu |q|^4 q + \kappa |q|^6 q = 0. \quad (8)$$

9. Семейство уравнений произвольного порядка для описания оптических солитонов [8]

$$i q_t + \sum_{m=1}^M \alpha_m \frac{\partial^{2m} q}{\partial x^{2m}} + i \sum_{m=1}^M \beta_m \frac{\partial^{2m-1} q}{\partial x^{2m-1}} + \\ + \sum_{m=1}^M \mu_m |q|^{2m} q + \chi q + \sum_{m=1}^M \nu_m |q|^{-2m} q = 0, \quad (i^2 = -1). \quad (9)$$

10. Обобщенное уравнение Фокаса-Ленеля [9]

$$i q_t + \alpha_1 q_{xx} + \alpha_2 q_{xt} + |q|^2 (b q + i \sigma q_x) = \\ = i [\alpha q_x + \lambda (|q|^{2n} q)_x + \mu (|q|^{2n})_x q], \quad (i^2 = -1). \quad (10)$$

Отличительной особенностью перечисленных выше уравнений является то, что они не относятся к классу интегрируемых методом обратной задачи рассеяния уравнений и поэтому их решения

находятся используя переменные бегущей волны. Ранее после перехода к переменным бегущей волны точные решения искались с помощью популярных в последние годы методов, что вообще говоря правильно для неинтегрируемых уравнений, но эти методы позволяют находить лишь некоторые решения. В действительности большинство указанных выше уравнений имеют общие решения в переменных бегущей волны, что как раз и демонстрируется в работах [1-9].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда "Разработка методов исследования нелинейных математических моделей (No 18-11-00209).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kudryashov N. A. First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation, *Optik*. 2019 V. 185, 275–281
2. Kudryashov N. A. First integral and general solution of traveling wave reduction for the Schrodinger equation with anti-cubic nonlinearity, *Optik*. 2019 V. 185, 665–671
3. Kudryashov N. A. General solution of the traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar model, *Optik*. 2019 V.186, 22–27
4. Kudryashov N. A. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation, *Optik*. 2019 V.186, 339–349
5. Kudryashov N. A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrodinger equation with cubic-quintic nonlinearity, *Optik*. 2019 V.188, 27–35
6. Kudryashov N. A. A generalized model for description pulses in optical fiber, *Optik*. 2019 V.189, 42–52
7. Kudryashov N. A. Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber, // *Optik*. 2019 V. 192, 162964
8. Kudryashov N. A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber, 2019 V.194 163060
9. Kudryashov N. A. First integrals and general solution of the Fokas-Lenells equation, *Optik*, 2019 V. 195 163135

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ
РАДХАКРИШНАНА-КУНДУ-ЛАКСМАНАНА В
ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ**
**NONLINEAR DYNAMICS OF THE TRAVELING WAVE
REDUCTION FOR THE
RADHAKRISHNAN-KUNDU-LAKSMANAN EQUATION**

Н. А. Кудряшов¹, С. Ф. Лаврова²

¹ *Национальный исследовательский ядерный университет
"МИФИ", Москва, Россия; nakudr@gmail.com*

² *Национальный исследовательский ядерный университет
"МИФИ", Москва, Россия; infuriatedot@gmail.com*

Уравнение Радхакришнана-Кунду-Лаксманана (РКЛ) описывает нелинейные дисперсионные волны в оптическом волокне. В данном докладе проведено исследование динамики системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной после перехода к переменным бегущей волны в уравнении РКЛ. Построены бифуркационные диаграммы и рассчитаны старшие ляпуновские показатели для некоторых интервалов значений параметров. Обнаружено, что в некоторых случаях в системе присутствует хаотическое поведение.

Уравнение РКЛ для описания дисперсионных нелинейных волн в оптическом волокне имеет вид [1-3]

$$i u_t + a u_{xx} + b |u|^2 u = i \alpha (|u|^2 u)_x - i \beta u_{xxx}, \quad (1)$$

где a, b, α, β – параметры уравнения.

Уравнение (1) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений бегущей волны. Предположим, что решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x, t) = y(z) e^{i\psi(z) - \omega t}, \quad z = x - C_0 t, \quad (2)$$

и подставим (2) в (1). В нормальной форме полученная редукция выглядит следующим образом

$$v_z = \frac{C_0}{\beta} u - \frac{2a}{\beta} u \phi - \frac{a}{\beta} y \mu + \frac{3\alpha}{\beta} y^2 u + 3u \phi^2 + 3y \phi \mu, \\ \mu_z = \frac{\omega}{\beta} + \frac{C_0}{\beta} \phi + \frac{a v}{\beta y} - \frac{a}{\beta} \phi^2 + \frac{b}{\beta} y^2 + \frac{\alpha}{\beta} y^2 \phi - \frac{3v \phi}{y} - \frac{3\mu}{y} + \phi^3, \quad (3) \\ y_z = u, \quad u_z = v, \quad \psi_z = \phi, \quad \phi_z = \mu.$$

Нелинейную динамику системы (3) можно исследовать путем построения ее бифуркационных диаграмм и расчета старших ляпуновских показателей для различных значений параметров.

Бифуркационная диаграмма в этой работе строилась путем сечения решения плоскостью $y = C$ в положительном направлении изменения y .

Ляпуновские показатели качественно описывают степень расхождения близких траекторий системы. Чтобы обнаружить хаотическое поведение достаточно рассчитать старший ляпуновский показатель. Для его вычисления в данной работе использовался алгоритм Беннетина [4].

При некоторых отрицательных значениях β в системе наблюдается хаотическое поведение, так как старший ляпуновский показатель принимает положительное значение и в сечении Пуанкаре на бифуркационной диаграмме хаотическое число точек, что демонстрируется на рис. 1 и рис. 2.

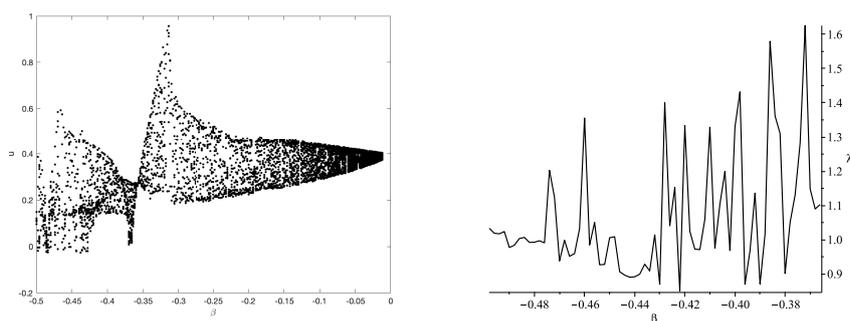


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма и зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра β при $C_0 = 1, a = 1, \alpha = 0.5, \omega = 1, b = 2, C = 0.5$.

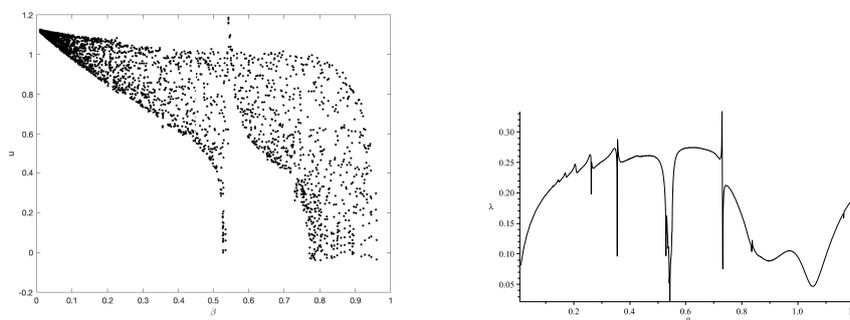


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма и зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра β при $C_0 = -6, a = -3, \alpha = 2, \omega = -8, b = 2, C = 0.5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation. // *Physics Letters A*. 2009. V. 373, P. 2546–2548.
2. Jianming Zhang, Shumming Li, Hongpeng Geng Bifurcations of exact travelling wave solutions for the generalized R-K-L equation. // *Journal of Applied Analysis and Computation*. 2016. V. 6(4), P. 1205–1210.
3. Kudryashov N. A., Safonova D. V., Biswas A. Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation. // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019, V. 24, № 10 6 (accepted).
4. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application. // *Meccanica*. 1980. V. 15.

**ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЯ
РАДХАКРИШНАНА-КУНДУ-ЛАКСМАНАНА В
ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ
INTEGRABILITY OF TRAVELING WAVE REDUCTION
FOR THE RADHAKRISHNAN-KUNDU-LAKSHMANAN
EQUATION**

Н. А. Кудряшов¹, Д. В. Сафонова², А. Biswas³

¹*Национальный исследовательский ядерный университет
"МИФИ", Москва, Россия; nakudr@gmail.com*

²*Национальный исследовательский ядерный университет
"МИФИ", Москва, Россия; safonovadashav@gmail.com*

³*Department of Physics, Chemistry and Mathematics, Alabama A&M
University, Normal, AL 35762-7500, USA*

Рассматривается уравнение Радхакришнана-Кунду-Лаксманана (РКЛ) для описания нелинейных волн в оптическом волокне. Задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому в работе уравнение рассматривается в переменных бегущей волны. Найден первый интеграл для обыкновенного дифференциального уравнения, используя который получено общее решение при некоторых ограничениях на параметры математической модели. Найденное решение выражается через эллиптическую функции Вейерштрасса. Периодические и уединенные волны уравнения РКЛ иллюстрируются.

Уравнение РКЛ в настоящее время хорошо известно. Оно используется для описания дисперсионных нелинейных волн в оптическом волокне [1-3]. Оно имеет вид

$$i u_t + a u_{xx} + b |u|^2 u = i \alpha (|u|^2 u)_x - i \beta u_{xxx}, \quad (1)$$

где a, b, α, β – параметры уравнения.

Уравнение (1) не относится к классу интегрируемых уравнений методом обратной задачи рассеяния и поэтому его решение будем искать используя переменные бегущей волны: $u(x, t) = y(z) \exp(i(\psi(z) - \omega t))$, $z = x - C_0 t$. Подставляя в уравнение (1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для мнимой и действительной части переменной $u(x, t)$ в виде (1).

$$-C_0 y_z + 2a y_z \psi_z + a y \psi_{zz} - 3\alpha y^2 y_z + \beta y_{zzz} - 3\beta y_z \psi_z^2 - 3\beta y \psi_z \psi_{zz} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \omega y + C_0 y \psi_z + a y_{zz} - a y \psi_z^2 + b y^3 + \alpha y^3 \psi_z - 3\beta y_{zz} \psi_z - \\ - \beta y \psi_{zzz} - 3\beta y_z \psi_{zz} + \beta y \psi_z^3 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (2) интегрируется по z . Предполагая, что $\psi_z = k$ и умножая на y_z/y^2 это уравнение можно проинтегрировать еще раз. Получаем первый интеграл

$$\frac{\beta y_z^2}{2 y} - \frac{1}{4} \alpha y^3 - \frac{3}{2} \beta k^2 y - \frac{1}{2} C_0 y + a k y - \frac{C_1}{y} + C_2 = 0, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 константы интегрирования.

Используя тест Пенлеве для исходного уравнений РКЛ получаем, что оно проходит тест Пенлеве при следующих ограничениях на параметры уравнения

$$k = -\frac{b}{\alpha}, \quad a = -\frac{3b\beta}{\alpha}, \quad \omega = \frac{bC_0}{\alpha} - \frac{2b^3\beta}{\alpha^3}. \quad (5)$$

При условиях (5), уравнение (3) выполняется, а уравнение (4) принимает вид

$$y_z^2 = \frac{\alpha}{2\beta} y^4 + \left(\frac{C_0}{\beta} - 3 \frac{b^2}{\alpha^2} \right) y^2 - 2 \frac{C_2}{\beta} y + 2 \frac{C_1}{\beta}. \quad (6)$$

Уравнение (6) приводится к виду $V_z^2 = AV^3 + BV + C$, где A, B, C величины зависящие от параметров уравнения (6) [3-5]. Решение

этого уравнения выражается четез эллиптическую функцию Вейерштрасса, удовлетворяющую уравнению $\wp_z^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3 = 0$. Таким образом общее решение исходного обыкновенного дифференциального уравнения при условиях (5) имеет вид

$$y(z) = \frac{A}{hA + 4\wp(z + z_0, -\frac{BA}{4}, -\frac{CA^2}{16})} + m, \quad (7)$$

где A, B, C, h, m величины зависящие от параметров уравнения (6).

При $C_1 = 0, C_2 = 0$ решение уравнения (6) принимает вид уединенной волны

$$y(z) = \frac{4\mu e^{\sqrt{\mu}(z-z_0)}}{4\mu\nu + e^{2\sqrt{\mu}(z-z_0)}}, \quad \mu = \frac{C_0}{\beta} - 3\frac{b^2}{\alpha^2}, \quad \nu = -\frac{\alpha}{2\beta}. \quad (8)$$

На Рис. 3 построены решения (7) и (8) уравнения (6) при разных значениях параметров.

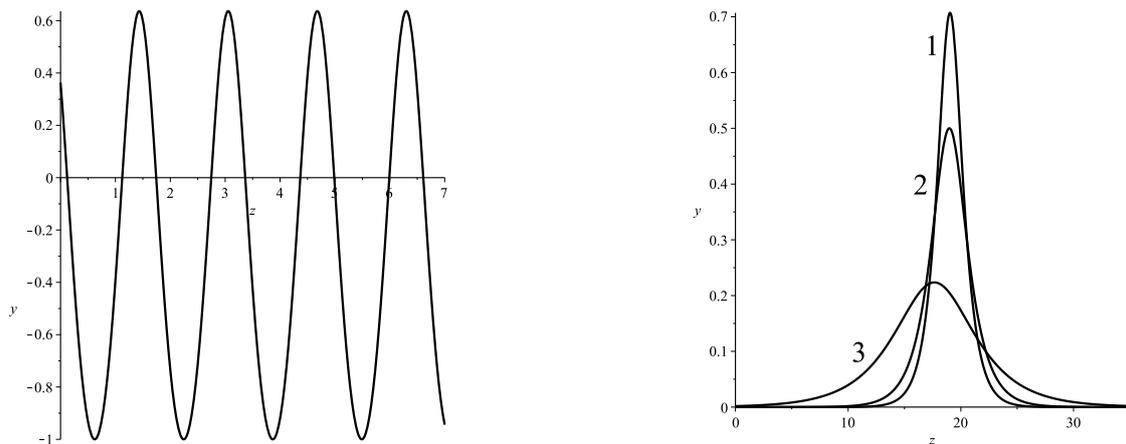


Рис. 3. Решения (7) при $C_0 = -6, C_2 = -2, C_1 = 6, \alpha = 2, \beta = 1, b = 2, z_0 = 1$ (слева), решения (8) при $\mu = 1.0(1), 0.5(2), 0.1(3), \nu = 2, z_0 = 18$ (справа)

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда "Разработка методов исследования нелинейных математических моделей (No 18-11-00209).

ЛИТЕРАТУРА

1. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation. // Physics Letters A. 2009. V. 373, P. 2546–2548.
2. Jianming Zhang, Shumming Li, Hongpeng Geng Bifurcations of exact travelling wave solutions for the generalized R-K-L equation. // Journal of Applied Analysis and Computation. 2016. V. 6(4), P. 1205–1210.

3. Kudryashov N. A., Safonova D. V., Biswas A. Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation. // Regular and Chaotic Dynamics. 2019, V. 24, no. 6 (accepted).
4. Kudryashov N. A. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. // Optik. 2019. V. 186, P. 339–349.
5. Kudryashov N. A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity. // Optik. 2019. V. 188, P. 27–35.

**БИФУРКАЦИИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ В
ВАРИАЦИОННОМ УРАВНЕНИИ
ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ**

**BIFURCATIONS OF EQUILIBRIUM STATES AT THE
VARIATIONAL GINZBURG-LANDAU EQUATION**

А. Н. Куликов¹, Д. А. Куликов²

¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль, Россия; kulikov_d_a@mail.ru

²Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль, Россия; anat_kulikov@mail.ru

Кубическое комплексное уравнение

$$u_t = \alpha u + (l_1 + il_2)u|u|^2 + (d_1 + id_2)u_{xx}, \quad (1)$$

где $u = u(t, x) = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$, $\alpha, b_1, b_2, d_1, d_2 \in R$, принято называть уравнением Гинзбурга-Ландау [1]. При этом с необходимостью $d_1 \leq 0$. Обычно, уравнение (1) рассматривают при дополнительных предположениях $l_1 \leq 0, \alpha \geq 0$.

При $l_2 = d_2 = 0$ получаем частный случай уравнения (1), который принято называть вариационным уравнением Гинзбурга-Ландау [1,2]. Без нарушения общности такой вариант уравнения (1) можно считать записанным в виде

$$u_t = u - u|u|^2 + du_{xx}, d > 0. \quad (2)$$

Вместе с уравнением (2) в задачах, имеющих приложения в теории сверхпроводимости, рассматривают также следующий вариант вариационного уравнения Гинзбурга-Ландау

$$u_t = u - u|u|^4 + du_{xx}. \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) обычно рассматривают вместе с периодическими краевыми условиями, которые после перенормировок можно записать следующим образом

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (4)$$

Краевые задачи (2), (4) и (3), (4) имеют кроме тривиального состояния равновесия $u = 0$ также однопараметрические семейства неоднородных состояний равновесия

$$\begin{aligned} S_2(n) : u_{n,2}(x, h) &= \eta_{n,2} \exp(inx + ih), \\ S_4(n) : u_{n,4}(x, h) &= \eta_{n,4} \exp(inx + ih), \quad h \in R, \end{aligned} \quad (5)$$

соответственно.

Здесь $\eta_{n,2} = (1 - dn^2)^{1/2}$, $\eta_{n,4} = (1 - dn^2)^{1/4}$. Семейства $S_2(n)$, $S_4(n)$ существуют, если справедливо неравенство $1 - dn^2 > 0$. Одномерные инвариантные многообразия $S_p(n)$ ($p = 2, 4, n \neq 0$) – локальные аттракторы, если $d \in (0, d_{n,p})$, $d_{n,2} = 2/(6n^2 - 1)$, $d_{n,4} = 4/(8n^2 - 1)$ и эти многообразия будут седловыми, если $d \in (d_{n,p}, \infty)$.

Равенства $d = d_{n,p}$ выделяют условия реализации критического случая в задаче об устойчивости многообразий $S_p(n)$ в контексте теоремы об устойчивости по линейному приближению. Пусть теперь $d = d_{n,p}(1 - \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. При таком выборе d можно показать, что справедливо утверждение.

Теорема. *Существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p, n)$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждая из краевых задач имеет двумерное инвариантное многообразие заполненное нетривиальными неустойчивыми состояниями равновесия.*

Для решений, формирующих данное двумерное многообразие справедливы асимптотические формулы

$$u(x, \varepsilon, n, p) = \exp(inx + ih_1) \left[1 + \sqrt{\varepsilon \alpha_{n,p}} [\cos(x + h_2) - 2in \sin(x + h_2)] + O(\varepsilon) \right],$$

где h_1, h_2 – произвольные действительные числа.

Индекс p принимает значение 2 при рассмотрении краевой задачи (2), (4) и принимает значение 4 при анализе краевой задачи (3), (4). Наконец,

$$\alpha_{n,2} = \frac{6n^2 - 1}{3(16n^4 - 1)}, \quad \alpha_{n,4} = \frac{3(8n^2 - 1)}{2(4n^2 - 1)(16n^4 + 5)}.$$

Эти инвариантные многообразия были получены при изучении бифуркационной задачи в окрестности состояний равновесия $u_{n,p}$ (см. формулы (5)).

Отметим, что асимптотические формулы могут быть выписаны с большей точностью.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 18-01-00672).

ЛИТЕРАТУРА

1. Aranson I. S., Kramer I. The world of complex Ginzburg-Landau equation // Reviews of modern physics. 2002. V. 74. P. 99–143.
2. Kulikov A. N., Rudy A. S. States of equilibrium of condensed matter Ginzburg-Landau ψ^4 – model // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 15, № 1. С. 75–85.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ПОВОРОТА ПРОСТРАНСТВЕННОГО АРГУМЕНТА И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

INVESTIGATION OF EQUILIBRIUM STATES AND THEIR STABILITY OF THE INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SPATIAL ARGUMENT ROTATION OPERATOR AND DELAY

В. А. Куликов

¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль, Российская Федерация; kulikov7677@gmail.com

В круге $K_R = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ рассматривается начально-краевая задача вида

$$\begin{aligned}u_t + u &= D\Delta_{\rho\phi}u + K(1 + \gamma\cos(u_{\theta T})), \quad u_{\rho}(R, \phi, t) = 0, \\u(\rho, \phi, t) &= u(\rho, \phi + 2\pi, t)\end{aligned}\tag{1}$$

относительно функции $u(\rho, \phi, t + s), t \geq 0, -T \leq s \leq 0$, где $T > 0$ величина запаздывания аргумента, с начальным условием $u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0)$. Пространство начальных условий $H(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \otimes [-T, 0])$, при каждом s $u(\rho, \phi, s) \in W_2^1(K_R), u(\rho, \phi, s) = u(\rho, \phi + 2\pi, s)\}$, где пространство функций $W_2^1(K_R)$ получено замыканием множества функций $u(\rho, \phi) \in C^1(\bar{K}_R), u_\rho(R, \phi) = 0$ в метрике пространства функций $W_2^1(K_R)$. В (1) $\Delta_{\rho\phi}$ - оператор Лапласа в полярных координатах, который считаем симметрично расширенным на пространство $W_2^1(K_R)$, $u_{\theta T}(\rho, \phi, t) \equiv u(\rho, \phi + \theta, t - T) (0 \leq \theta < 2\pi)$ - оператор поворота пространственного аргумента и временного запаздывания, D, K - положительные постоянные, $0 < \gamma < 1$.

Однородные состояния равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$ начально-краевой задачи (1) определяются как решения уравнения

$$u = K(1 + \gamma \cos(u)) \quad (2)$$

Уравнение (2) в зависимости от K и γ может иметь несколько решений, в том числе кратные. Исследуются условия возникновения состояний равновесия, их устойчивость и механизмы потери устойчивости в зависимости от параметров начально-краевой задачи (1).

Выберем одно из решений $u_* = u_*(K, \gamma)$ уравнения (2) и запишем начально-краевую задачу (1) в его окрестности, заменив $u(\rho, \phi, t) \rightarrow u_*(K, \gamma) + u(\rho, \phi, t)$. Оставив лишь линейную часть, получим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t + u &= D\Delta_{\rho\phi}u - bu_{\theta T}, \quad u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi + 2\pi, t), \\ u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} &= u_0(\rho, \phi, s), \end{aligned} \quad (3)$$

$b = K\gamma \sin(u_*(K, \gamma))$. Определяя решения (3) вида

$$u(\rho, \phi, t) = v(\rho, \phi)e^{\lambda t}, \quad \lambda \in C$$

получим пучок операторов

$$P(\lambda) \equiv \lambda v(\rho, \phi) + v(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho\phi}v(\rho, \phi) + bv(\rho, \phi + \theta)e^{-\lambda T}, \quad (4)$$

действующий в $L_2(K_R)$ с областью определения $W_2^1(K_R)$, спектр которого определяет устойчивость (неустойчивость) решений начально-краевой задачи (4).

Определяя $v(\rho, \phi)$ в виде

$$v(\rho, \phi) = v_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{nj}(\rho)(v_{nj}e^{in\phi} + w_{nj}e^{-in\phi}),$$

$$i = \sqrt{-1}, v_0 \in \mathbb{R}, v_{nj}, w_{nj} \in \mathbb{C}, v_{-nj} = \bar{v}_{nj}, w_{-nj} = \bar{w}_{nj}, v_{0j} = w_{0j},$$

$$R_{nj}(\rho) = \frac{\sqrt{(2)/R} J_n(\gamma_{nj}\rho/R)}{(1 - n^2/\gamma_{jn}^2)^{1/2} J_n(\gamma_{nj})},$$

$$(R_{nj}(\rho), R_{np}(\rho)) = \int_0^R \rho R_{nj}(\rho) R_{np}(\rho) d\rho = \delta_{jp},$$

где $J_n(\rho)$ функции Бесселя первого рода n -го порядка, γ_{nj} j -й положительный ноль функции $J'_n(\rho)$, а δ_{jp} – символ Кронекера, получим последовательность уравнений

$$(\lambda+1+D\gamma_{nj}^2+be^{in\theta-\lambda T})v_{nj} = 0, (\lambda+1+D\gamma_{nj}^2+be^{-in\theta-\lambda T})w_{nj} = 0, \quad (5)$$

из которых определяются точки спектра пучка операторов (4), отвечающие за устойчивость решений (3). Ненулевые v_0, v_{nj}, w_{nj} , $n = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$, выбираются произвольно.

Для построения границ областей устойчивости в пространстве параметров K, θ, D, T воспользуемся методом D -разбиений [1]. Для этого положим в (5) $\lambda = i\omega$, $\omega \geq 0$ и приравняем нулю вещественную и мнимую части выражений в круглых скобках. В результате получим уравнения

$$b = b(D, T, n, \omega) = (-1)^{k+1}(1 + D\gamma_{nj}^2) / \cos(\arctg(\omega/(1 + D\gamma_{nj}^2))), \quad (6)$$

$$\theta^+ = \theta^+(D, T, n, \omega) = (T\omega + \arctg(\omega/(1 + D\gamma_{nj}^2)) + \pi k) / n, \quad (7)$$

$$\theta^- = \theta^-(D, T, n, \omega) = (-T\omega - \arctg(\omega/(1 + D\gamma_{nj}^2)) + \pi k) / n, \quad (8)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 2n, j = 1, 2, \dots$, и $b = b(\omega) = (-1)^{k+1} / \cos(\arctg(\omega)), T = T(\omega) = \omega^{-1}(\pi k - \arctg(\omega)), k = 1, 2, \dots$, при $n = 0, j = 0$.

Рассмотрим теперь

$$K = K(u_*) = u_*/(1 + \gamma \cos(u_*)), b = b(u_*) = \gamma u_* \sin(u_*) / (1 + \gamma \cos(u_*)) \quad (9)$$

как функции состояния равновесия $u_* > 0$. Выразим из (6),

$$\omega = \omega(b) = (1 + D\gamma_{nj}^2) \operatorname{tg}(\arccos((-1)^{k+1}(1 + D\gamma_{nj}^2)/b))$$

и подставим в (7),(8). В результате получим

$$\theta^+ = \theta^+(u_*, D, T, n) = (T\omega(b(u_*)) + \arccos((-1)^{k+1}(1+D\gamma_{nj}^2)/b(u_*)) + \pi k)/n, \quad (10)$$

$$\theta^- = \theta^-(u_*, D, T, n) = (-T\omega(b(u_*)) - \arccos((-1)^{k+1}(1+D\gamma_{nj}^2)/b(u_*)) + \pi k)/n, \quad (11)$$

$$n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 2n, j = 1, 2, \dots.$$

Изменяя теперь u_* в (9)–(11) для различных фиксированных значений D, T, n построим в плоскости (K, θ) границы перехода точек спектра пучка операторов (4) из левой комплексной полуплоскости в правую и, тем самым, получим границы областей устойчивости различных состояний равновесия начально-краевой задачи (1) в плоскости (K, θ) , а также характер потери устойчивости соответствующих состояний равновесия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 19-31-90133).

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И. D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем). ПММ. 1949. Т. 13. № 4. С. 349–380.

**СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ
АВТОВОЛНОВОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ
УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ С БАРЬЕРАМИ**
**EXISTENCE AND STABILITY OF THE AUTOWAVE
SOLUTION TO THE SYSTEM OF EQUATIONS IN
MEDIA WITH BARRIERS**

Н. Т. Левашова¹, Б. В. Тищенко²

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова», Москва, Россия;
natasha@npanalytica.ru

² Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова», Москва, Россия;
dondor95@gmail.com

Рассматривается краевая задача для системы двух уравнений

$$\varepsilon^4 \frac{d^2 u}{dx^2} = f(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = g(u, v, x, \varepsilon), \quad -1 < x < 1,$$
$$u_x(\mp 1) = v_x(\mp 1) = 0.$$

Здесь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр.

Подобная система используется для моделирования автоволновых процессов при наличии барьеров. В частности, такой задачей является расширение мегаполисов за счет геобиоценозов. В качестве барьеров в этом случае могут выступать естественные водные преграды.

Для рассматриваемой задачи доказано существование, локальная единственность и асимптотическая устойчивость решения, обладающего большим градиентом в окрестности границ барьеров при выполнении следующих условий, которые физически являются условиями запираания автоволны барьером.

Условие 1. Функции $f(u, v, x, \varepsilon)$, $g(u, v, x, \varepsilon)$, определены в на множестве $\bar{\Omega} := (u, v, x, \varepsilon) \in I_u \times I_v \times [-1; 1] \times (0; \varepsilon_0]$, где I_u , I_v – допустимые области изменения u и v . Считаем, что эти функции претерпевают разрыв первого рода на части плоскости

$\{u \in I_u, v \in I_v, x = x_0\}$, где x_0 – внутренняя точка интервала $(-1, 1)$:

$$f(u, v, x, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, -1 \leq x \leq x_0 - 0, \\ f^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, x_0 + 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$g(u, v, x, \varepsilon) = \begin{cases} g^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, -1 \leq x \leq x_0 - 0, \\ g^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, x_0 + 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где $f^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), g^{(-)}(u, v, x, \varepsilon) \in C^2(I_u \times I_v \times [-1, x_0] \times (0, \varepsilon_0])$,
 $f^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), g^{(+)}(u, v, x, \varepsilon) \in C^2(I_u \times I_v \times [x_0, 1] \times (0, \varepsilon_0])$.

Условие 2 (квазимонотонность). Пусть производные $f_v^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon)$ и $g_u^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon)$ сохраняют знак во всей области определения, и, кроме того, в случаях $f_v^{(\pm)}(u, v, x, \varepsilon) < 0, g_u^{(\pm)}(u, v, x, \varepsilon) > 0$ и $f_v^{(\pm)}(u, v, x, \varepsilon) > 0, g_u^{(\pm)}(u, v, x, \varepsilon) < 0$ выполняются неравенства

$$g_v^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(v, x), v, x, 0) + \frac{f_v^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(v, x), v, x, 0)}{f_u^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(v, x), v, x, 0)} * g_u^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(v, x), v, x, 0) > 0.$$

Условие 3. Пусть из каждого уравнения $f^{(\mp)}(u, v, x, 0) = 0$ однозначно выражается функция $u : u = \varphi^{(\mp)}(v, x)$, соответственно, и при всех $(v, x) \in I_v \times [-1, 1]$ выполняются неравенства $f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0) > 0$. Для определенности будем считать, что $\varphi^{(-)}(v, x) < \varphi^{(+)}(v, x), (v, x) \in I_v \times [-1, 1]$.

Обозначим:

$$\Phi^{(\pm)}(v) := \left(2 \int_{\psi^{(\pm)}(x_0)}^v h^{(\pm)}(s, x_0) ds \right)^{1/2}, \quad \Psi^{(\pm)}(u, v) := \left(2 \int_{\varphi^{(\pm)}(v, x_0)}^u f^{(\pm)}(s, v, x_0) ds \right)^{1/2},$$

$$H^v(v) := \Phi^{(-)}(v) - \Phi^{(+)}(v), \quad H^u(u, v) := \Psi^{(-)}(u, v) - \Psi^{(+)}(u, v).$$

Условие 4. Пусть уравнение $H^v(v) = 0$ имеет единственное решение p_0 внутри интервала $(\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0))$, а уравнение $H^u(u, p_0) = 0$ имеет единственное решение q_0 внутри интервала $(\varphi^{(-)}(\psi^{(-)}(x_0), x_0), \varphi^{(+)}(\psi^{(+)}(x_0), x_0))$.

Условие 5. Пусть выполнены неравенства

$$\frac{dH^v}{dv}(p_0) > 0 \Leftrightarrow h^{(-)}(p_0, x_0) - h^{(+)}(p_0, x_0) > 0,$$

$$\frac{\partial H^u}{\partial u}(q_0, p_0) > 0 \Leftrightarrow f^{(-)}(q_0, p_0, x_0, 0) - f^{(+)}(q_0, p_0, x_0, 0) > 0.$$

Определение. Решением исходной задачи будем называть пару функций

$(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ из класса $C^1[0, 1] \cap C^2((0, 1) \setminus x_0)$ удовлетворяющих краевым условиям и уравнению задачи, за исключением точки x_0 .

С помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств в работе доказано, что при указанных условиях рассматриваемая задача может иметь решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ в смысле этого определения с внутренним переходным слоем, то есть областью, где происходит его резкое изменение от значений $(\varphi^{(-)}(v^{(-)}(x), x), v^{(-)}(x))$ до значений $(\varphi^{(+)}(v^{(+)}(x), x), v^{(+)}(x))$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 19-01-00327).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Семина А. Е. Автоволновая модель морфогенеза мегаполисов в представлениях неоднородных активных сред // Известия РАН, серия физическая. 2019. Том. 83, № 1. С. 106–112.
2. Pao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992.
3. Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // ЖВМ и МФ. 2012. Том. 52, № 11. С. 1983–2003.

**НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
МЕТОДОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ**

**SOME FEATURES OF USING
ASYMPTOTIC ANALYSIS
IN SOLVING OF INVERSE PROBLEMS
FOR NONLINEAR
SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS**

Д. В. Лукьяненко

*МГУ имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики, Москва, Россия;
lukyanenko@physics.msu.ru*

Теория решения некорректно поставленных обратных задач достаточно хорошо развита. Основы теории и современная теория численных методов решения линейных и нелинейных некорректно поставленных задач были заложены в фундаментальных работах А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева и получили дальнейшее развитие в работах А. Б. Бакушинского, В. В. Васина, А. Н. Гончарского, А. М. Денисова, С. И. Кабанихина, А. С. Леонова, В. А. Морозова, А. Г. Яголы и многих других ученых. Из зарубежных исследователей необходимо отметить работы Х. Энгла (Австрия), Р. Горенфло, Ф. Наттерера, Р. Плато (Германия), Г. Вайникко (Эстония), М. Клибанова, А. Рамма (США) и многих других.

Однако развитые на данный момент методы лишь частично решают проблемы, которые возникают при решении обратных задач для нелинейных сингулярно возмущённых уравнений с частными производными, решения которых содержат стационарные или движущиеся внутренние переходные слои. Основным подходом к решению задач такого класса является классический итерационный градиентный метод решения, основанный на минимизации функционала невязки, и требующий для вычисления градиента на каждой итерации выполнения процедуры решения прямой и сопряжённой задач, каждая из которых является сингулярно возмущённой, что означает, что их решения могут содержать как внутренние так и пограничные слои, что требует применения сеток с очень большим

числом узлов. Это приводит к существенному увеличению времени счёта и затрат компьютерных ресурсов. В свою очередь, рост объёма вычислений влечет накопление ошибок и потерю точности, что приводит к повышенной неустойчивости решения соответствующих некорректно поставленных обратных задач.

Идея использования методов асимптотического анализа при построении эффективных численных алгоритмов решения коэффициентных обратных задач для нелинейных сингулярно возмущённых уравнений была впервые реализована в работе [1], где была рассмотрена коэффициентная обратная задача для нелинейного сингулярно возмущённого уравнения типа реакция-диффузия-адвекция с данными в финальный момент времени. В указанной работе при реализации итерационного градиентного метода решения использовался асимптотический анализ, заключающийся в выделении априорной информации о зависимости положения движущегося фронта реакции от времени в решении прямой задачи и о наличии пограничных слоёв в решении сопряжённой задачи, для построения специальной адаптированной сетки, являющейся одной из вариаций сеток Г. И. Шишкина. Предложенный подход позволил значительно оптимизировать численный счёт и существенно улучшить устойчивость решения соответствующей обратной задачи.

Однако, существует и другой подход к использованию методов асимптотического анализа для решения обратных задач рассматриваемого класса. Важной особенностью применения методов асимптотического анализа к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных является то, что асимптотический анализ зачастую позволяет свести исходную нелинейную сингулярно возмущённую задачу для уравнения в частных производных к гораздо более простой задаче, которая не содержит малых параметров и имеет меньшую размерность (а иногда и вовсе содержит не дифференциальные, а алгебраические уравнения), получив при этом достаточно точное качественное и количественное описание решения. Более того, редуцированные с помощью методов асимптотического анализа постановки задач зачастую связывают полуживым образом параметры, которые необходимо восстановить при решении обратной задачи (коэффициенты в уравнении, граничные и начальные условия и т.п.) с положением движущегося фронта реакции, информация о движении которого является наиболее естественной дополнительной информацией при

решении реальных прикладных задач (экспериментальные наблюдения положения фронта ударной волны, фронта реакции или горения и т.п.). Впервые такой подход был реализован в работах [2,3,4].

В данном докладе на примере решения некоторых конкретных обратных задач для нелинейных сингулярно возмущённых уравнений с частными производными будут рассмотрены особенности применимости упомянутых выше подходов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00865 и 18-31-00204).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lukyanenko D. V., Shishlenin M. A., Volkov V. T.* Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018. V. 54. P. 233–247.
2. *Lukyanenko D. V., Grigorev V. B., Volkov V. T., Shishlenin M. A.* Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction-diffusion equation with the location of moving front data // *Computers and Mathematics with Applications*. 2019. V. 77, № 5. P. 1245–1254.
3. *Lukyanenko D. V., Shishlenin M. A., Volkov V. T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2019. DOI: 10.1515/jiip-2017-0074.
4. *Лукьяненко Д. В., Мельникова А. А.* Использование методов асимптотического анализа для решения одной коэффициентной обратной задачи для системы нелинейных сингулярно возмущённых уравнений типа реакция-диффузия с кубической нелинейностью // *Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии*. 2019. Т. 20. [В печати]

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНОЙ
ФОРМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ХАТЧИНСОНА С КОНКУРЕНТНОЙ И
ДИФФУЗИОННОЙ СВЯЗЬЮ**

**DYNAMIC PROPERTIES OF NORMAL FORM FOR A
SYSTEM OF HUTCHINSON EQUATIONS WITH
COMPETITIVE AND DIFFUSION COUPLING**

Е. А. Марушкина¹, Е. С. Самсонова²

¹Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль, Россия; marushkina-ea@yandex.ru

²Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль, Россия; e.s.samsonova@yandex.ru

Рассмотрим систему связанных уравнений Хатчинсона [1], описывающих динамику слабого конкурентного взаимодействия двух популяций:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)(1 + \varepsilon\alpha - N_1(t-1) - \varepsilon\alpha N_2)N_1 + \varepsilon d(N_2 - N_1), \\ \dot{N}_2 &= \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)(1 + \varepsilon\alpha - N_2(t-1) - \varepsilon\alpha N_1)N_2 + \varepsilon d(N_1 - N_2).\end{aligned}\quad (1)$$

В этой задаче $N_1(t)$, $N_2(t)$ — плотности численностей популяций, параметр α отвечает за конкурентную связь видов, а d — коэффициент диффузионного взаимодействия. Связь между популяциями выбрана слабой, пропорциональной малому параметру $0 < \varepsilon \ll 1$.

При $\varepsilon = 0$ система (1) имеет устойчивое четырехмерное инвариантное многообразие, уравнения на котором могут быть получены с помощью метода нормальных форм [2]. Нормальная форма системы (1), записанная в амплитудных и фазовых переменных, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi_1' &= \operatorname{sgn}(1 - \alpha)\xi_1 - \xi_1^3 + D(\xi_2 \cos(\varphi + \delta) - \xi_1 \cos \delta), \\ \xi_2' &= \operatorname{sgn}(1 - \alpha)\xi_2 - \xi_2^3 + D(\xi_1 \cos(\varphi - \delta) - \xi_2 \cos \delta), \\ \varphi' &= -b(\xi_2^2 - \xi_1^2) - D\left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\varphi - \delta) + \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\varphi + \delta)\right).\end{aligned}\quad (2)$$

В этой системе параметры выбраны следующим образом: $b = (\pi + 6)/(3\pi - 2)$, $\delta = -\arctan(\pi/2)$, $D = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}(2d - \pi\alpha)/(\pi|1 - \alpha|)}$. Функции $\xi_1(s)$ и $\xi_2(s)$ представляют собой медленно меняющиеся амплитуды циклов, а $\varphi(s)$ — их разность фаз.

При анализе динамических свойств системы (2) удобно выделить два случая, зависящие от коэффициента конкурентной связи: $0 < \alpha < 1$ и $\alpha > 1$. Рассмотрим сначала ситуацию $0 < \alpha < 1$. Если $\xi_1 = \xi_2$, то система (2) имеет два состояния равновесия $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\varphi = 0$ и $\xi_1 = \xi_2 = \xi^* = \sqrt{1 - 2D \cos \delta}$, $\varphi = \pi$. Кроме того, в этой ситуации данная система полностью соответствует системе, полученной в работе [3] в качестве нормальной формы системы диффузионно слабо связанных уравнений Хатчинсона. В работе [3] приведен анализ ее качественного поведения при значениях $D > 0$ и выделены области с разными сценариями фазовых перестроек при изменении параметра D .

При $D < 0$ была получена новая ситуация, не исследованная ранее, которая может быть разрешима при помощи замены (см., например, [4]):

$$\xi_1 \rightarrow \sqrt{1 - 2D \cos \delta} \xi_1, \quad \xi_2 \rightarrow \sqrt{1 - 2D \cos \delta} \xi_2, \quad \alpha \rightarrow \pi + \alpha. \quad (3)$$

Замена (3) переводит состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ в $(1, 1, 0)^T$, а $(1, 1, 0)^T$ соответственно в $(1/\xi^*, 1/\xi^*, \pi)^T$. Кроме того, замена времени $s = (1 - 2D \cos \delta)s^*$ позволяет свести нормальную форму (2) к идентичной ей с параметром связи $D^* = -D/(1 - 2D \cos \delta)$.

Приведем полученный при $D < 0$ сценарий фазовых перестроек нормальной формы (численный эксперимент выполнен при $\alpha = 0.5$). При значениях параметра $D < -1.308$ ($0 < d < 0.234$) глобально устойчиво состояние равновесия $\xi_1 = \xi_2 = 1/\xi^*$, $\alpha = \pi$. При значении $D \approx -1.308$ ($d \approx 0.234$) рождаются еще два устойчивых состояния равновесия – точки $A = (\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*)^T$ и $B = (\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha_1^*)^T$, где $\xi_1^* > \xi_2^*$, $0 < \alpha_1^* < \pi/2$, и два неустойчивых – $C = (\eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*)^T$ и $E = (\eta_2^*, \eta_1^*, -\alpha_2^*)^T$, где $\eta_1^* > \eta_2^*$, $0 < \alpha_2^* < \pi/2$, кроме того $\eta_1^* > \xi_1^*$, $\xi_2^* > \eta_2^*$. Состояния равновесия A и B устойчивы при увеличении параметра D вплоть до значения -1.198 ($d \approx 0.283$), при котором состояния A и B теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B (бифуркация Андронова–Хопфа). При $D = -1.087$ ($d = 0.327$) неустойчивые неподвижные точки C и E сливаются с состоянием равновесия $(1/\xi^*, 1/\xi^*, \pi)^T$ и отбирают его устойчивость. При дальнейшем изменении параметра D устойчивые циклы C_A и C_B , родившиеся из точек A и B , увеличиваются в размерах до тех пор, пока при $D \approx -0.995$ ($d \approx 0.365$) не сомкнутся в точке $\xi_1 = \xi_2 = 1/\xi^*$, $\alpha = \pi$. В результате происходит объединение пары циклов в один C_U , который остается устойчивым вплоть до

значения $D \approx -0.796$ ($d \approx 0.449$). При $D \approx -0.933$ ($d \approx 0.392$) от неустойчивого состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа ответвляется неустойчивый цикл C_{II} , который при $D \approx -0.796$ ($d \approx 0.449$) сливается с устойчивым циклом C_U и исчезает. При $D > -0.796$ ($d > 0.449$) система имеет единственное, глобально устойчивое состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$.

Перейдем к случаю $\alpha > 1$. В этой ситуации при $d < \pi(1 + \alpha)/4$ система (2) имеет единственное глобально устойчивое состояние равновесия $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{-1 - 2D \cos \delta}$, $\varphi = \pi$. Локальная устойчивость этого состояния равновесия следует из анализа матрицы устойчивости, а обоснование глобальной устойчивости может быть получено при помощи численного анализа. При $d > \pi(1 + \alpha)/4$ единичное состояние равновесия исходной системы (1) локально асимптотически устойчиво. Более того непосредственный численный анализ позволяет предположить, что в этом случае данное решение глобально асимптотически устойчиво.

В работе изучена динамика нормальной формы для системы, состоящей из двух уравнений Хатчинсона с конкурентной и диффузионной связью. Приведен полный сценарий фазовых перестроек, происходящих в системе при изменении параметра диффузии. Кроме того, исследована зависимость этого сценария от коэффициента конкурентной связи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 18-29-10043).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hutchinson G. E. Circular causal system in ecology // Ann. N.-Y. Acad. Sci. 1948. Vol. 50. P. 221–246.
2. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Локальные методы анализа динамических систем. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 92 с.
3. Глызин С. Д. Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия» // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811.
4. Горчакова Е. В. Динамика слабого взаимодействия в системе близких видов // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 1. С. 68–74.

**СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОГРАНСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ
В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С СИНГУЛЯРНЫМ
ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ**

**EXISTENCE OF A BOUNDARY LAYER SOLUTION IN
AN ELLIPTIC PROBLEM WITH A SINGULAR
BOUNDARY CONDITION**

А. А. Мельникова¹, Н. Н. Дерюгина²

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, г. Москва, Россия;
melnikova@physics.msu.ru

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, г. Москва, Россия;
derunat@gmail.com

В работе рассматривается сингулярно возмущенная задача для эллиптического уравнения в замкнутой односвязной области D с достаточно гладкой границей ∂D

$$\varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, \varepsilon), \quad x = (x_1, x_2) \in D, \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = h(x), \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ - оператор Лапласа, а $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внутренней нормали к кривой ∂D . Отметим сингулярное граничное условие Неймана в постановке. Задачи с подобными условиями на отрезке рассматривались в работах [1] и [2].

Пусть выполнено

(A₀) Функции $f(u, x, \varepsilon)$ и $h(x)$ - достаточно гладкие.

(A₁) Вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет в области D единственный корень $u = \varphi(x)$, такой что $f_u(\varphi(x), x, 0) > 0$.

Цель работы состоит в доказательстве существования решения с пограничным слоем в задаче (1) и получении асимптотического приближения решения. Доказательство проводится асимптотическим методом дифференциальных неравенств [3], [4]. Метод предполагает обоснование существования решения с пограничным слоем через построение верхнего и нижнего решений на основе асимптотики.

Решение представляется в виде суммы функций двух видов:

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + Q(\xi, \theta, \varepsilon),$$

где $\bar{u}(x, \varepsilon)$ - регулярная часть, описывающая решение вдали от границы ∂D , $Q(\xi, \theta, \varepsilon)$ - функция, описывающая пограничный слой вблизи ∂D . Обе части решения представляются рядами по степеням ε :

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots, \quad Q(\xi, \theta, \varepsilon) = Q_0(\xi, \theta) + \varepsilon Q_1(\xi, \theta) + \dots$$

Вблизи границы по методу Люстерника-Вишика вводятся локальные переменные (l, θ) , а также растянутая переменная $\xi = \varepsilon^{-1}l$.

Уравнения для функций регулярной части и пограничного слоя составляются по методу Васильевой (см. [5]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (номер проекта 19-01-00327).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nesterov A. V. The asymptotic behavior of the solution to a parabolic equation with singularly perturbed boundary conditions // Comput. Math. Math. Phys. 1997. V. 37. № 9. С. 1051–1057.
2. Butuzov V. F., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. R. Periodic solutions with a boundary layer of reaction–diffusion equations with singularly perturbed Neumann boundary conditions // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. V. 24, № 8. С. 1440019-1–1440019-8.
3. Nefedov N. N. An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability // Diff. Eq. 2000. V. 36, № 2. С. 298–305.
4. Pao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СУММИРОВАНИЕ СИСТЕМ
ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В
КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ**

**ASYMPTOTIC SUMMATION OF PERTURBED LINEAR
DIFFERENCE SYSTEMS IN CRITICAL CASE**

П. Н. Нестеров

ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия;
p.nesterov@uniyar.ac.ru

В работе предложен метод построения асимптотических формул при $t \rightarrow \infty$ для решений систем линейных разностных уравнений вида

$$x(t+1) = [A + G(t)]x(t), \quad t \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{C}^m. \quad (1)$$

Здесь A — постоянная $(m \times m)$ -матрица, а $G(t)$ — некоторая переменная $(m \times m)$ -матрица такая, что $G(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Вопросу построения асимптотики решений систем вида (1) посвящено множество статей. Достаточно подробный обзор работ по этой тематике приведен в недавней монографии [1]. Мы будем предполагать, что матрица A имеет N собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ (с учетом кратностей), лежащих на единичной окружности $|z| = 1$ в \mathbb{C} , а остальные собственные числа матрицы лежат внутри круга $|z| < 1$. Кроме того, матрица $G(t)$, играющая роль возмущающего члена в (1), представляет собой сумму двух матриц:

$$G(t) = B(t) + R(t).$$

В этом представлении элементы матрицы $B(t)$ стремятся к нулю колебательным образом при $t \rightarrow \infty$, а матрица $R(t)$ является абсолютно суммируемой в том смысле, что

$$\sum_{l=t_0}^{\infty} \|R(l)\| < \infty$$

для некоторого $t_0 \in \mathbb{N}$.

Условия, наложенные на спектр матрицы A , позволяют разложить пространство \mathbb{C}^m в прямую сумму

$$\mathbb{C}^m = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}.$$

Подпространства \mathcal{P} и \mathcal{Q} , в свою очередь, обладают следующими двумя свойствами:

(i) линейное подпространство \mathcal{P} есть линейная оболочка обобщенных собственных векторов матрицы A , отвечающих собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ таким, что $|\lambda_i| = 1$ ($i = 1, \dots, N$);

(ii) линейное подпространство \mathcal{Q} инвариантно относительно матрицы A , и, кроме того, для любого $x_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{Q}$ имеет место неравенство

$$|A^t x_{\mathcal{Q}}| \leq K q^t |x_{\mathcal{Q}}|, \quad t \in \mathbb{N},$$

где $K > 0$, $0 < q < 1$ и $|\cdot|$ — некоторая векторная норма в \mathbb{C}^m .

Предположения (i) и (ii) являются стандартными требованиями в теории центральных многообразий (см., в частности, [3, 4]). Мы воспользуемся основными идеями этой теории, а также вариантом метода усреднения, предложенным в работе [2], применительно к задаче получения асимптотических формул для решений системы (1). Разработанный нами метод мы продемонстрируем на примере задачи исследования динамики решений при $t \rightarrow \infty$ уравнения $(k+1)$ -го порядка

$$x(t+k+1) - x(t+k) + q(t)x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Здесь действительная функция $q(t)$ имеет следующий вид:

$$q(t) = \frac{p(t)}{t^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

где действительная функция $p(t)$ является или T -периодической ($T \in \mathbb{N}$) или представляет собой дискретный тригонометрический многочлен.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.13560.2019/13.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bodine S., Lutz D. A. Asymptotic integration of differential and difference equations. New York: Springer, 2015.
2. Burd V., Nesterov P. Asymptotic behaviour of solutions of the difference Schrödinger equation // J. Difference Equ. Appl. 2011. Vol. 17, № 11. P. 1555–1579.
3. Carr J. Applications of Centre Manifold Theory. New York: Springer-Verlag, 1981.
4. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

**О ПОГРАНИЧНЫХ И ВНУТРЕННИХ СЛОЯХ В
МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ
РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ С
МОДУЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ И СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ
BOUNDARE AND INTERNAL LAYERS IN
MULTIDIMENSIONAL
REACTION-DIFFUSIONADVECTION PROBLEMS WITH
MODULAR SOURCES AND SINGULARLY PERTURBED
BOUNDARY CONDITIONS**

Н. Н. Нефедов¹, Е. И. Никулин²

¹*Московский государственный университет, физический факультет, кафедра математики, 119991 Москва, Россия;*
`nefedov@phys.msu.ru`

²*Московский государственный университет, физический факультет, кафедра математики, 119991 Москва, Россия;*
`nikulin@physics.msu.ru`

В докладе представлены исследования новых классов сингулярно возмущенных периодических задач для параболического уравнения реакция-диффузия-адвекция в случае разрывного при некотором значении искомой функции источника - нелинейности, описывающей реакцию (взаимодействие), а также коэффициента адвекции. Рассмотрен случай существования внутреннего переходного слоя и условия существования пограничного в случае сингулярно возмущенных граничных условий. Построено асимптотическое приближение и исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову периодических решений в каждом из рассмотренных случаев. Для доказательства используется асимптотический метод дифференциальных неравенств. Приведены примеры и проведены численные расчеты, иллюстрирующие теоретический результаты.

Для иллюстрации рассматривается сингулярно возмущенное уравнение реакция-диффузия, естественно возникающая в математических моделях с быстрой реакцией:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, y, t, \varepsilon) &= 0, \\ (x, y, t) \in D_t &:= \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D, t \in R\}, \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, y, t, \varepsilon) + \sigma(x, y, t, \varepsilon)u &= h(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y) \in \Gamma, t \in R, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R, \end{aligned} \tag{1}$$

где производная $\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}$ берется по внутренней нормали к гладкой границе Γ заданной двумерной односвязной области D , а $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

В случае рассмотрения задач с внутренними слоями следует новый класс сингулярно возмущенных периодических задач в случае разрывного при некотором значении искомой функции источника - нелинейности, описывающей реакцию (взаимодействие). Рассмотрение таких задач инициировано работами по изучению внутренних слоев в задачах, где коэффициенты адвекции или реакции претерпевают разрывы и их называют нелинейностями модульного типа (см.[1] и ссылки в этих работах).

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial |u|}{\partial x} - B(u, x, t) &= 0 \\ \text{для } (x, t) \in \mathcal{D} &:= \{(x, t) \in R^2 : -1 < x < 1, t \in R\}, \\ u(-1, t, \varepsilon) &= u^{(-)}(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = u^{(+)}(t) \quad \text{для } t \in R, \\ u(x, t, \varepsilon) &= u(x, t + T, \varepsilon) \quad \text{для } t \in R, \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (N 19-01-000327).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нефедов Н. Н., Руденко О. В. О движении фронта в уравнении типа Бюргера с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении. // ДАН. 2018. Т. 478, № 3. С. 274–279.
2. Nefedov N. N. The existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of burgers type equations with modular advection. // Mathematical modelling of natural phenomena. 2019. V. 4, № . P. 1–14.

Построены асимптотические приближения решений стационарных задач указанного типа, получены условия и доказаны теоремы существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости таких решений. Доказательство проведено при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (№ 18-11-00042).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 7. С. 1142–1149.
2. Rao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York, 1992.
3. Пан Я Фей, Мин Кан Ни, Левашова Н. Т., Николаева О. А. Внутренние слои для сингулярно возмущённого квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с разрывной правой частью // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1616–1626.

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

CONTRAST STRUCTURES IN PROBLEMS FOR THE REACTION-DIFFUSION EQUATION WITH A DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE

А. О. Орлов¹, Н. Н. Нефедов²

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», Москва, Россия;
orlov.andrey@physics.msu.ru

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», Москва, Россия;
nefedov@phys.msu.ru

В настоящей работе исследуются периодические по времени решения задач для сингулярно возмущенного уравнения типа реакция-диффузия в случае разрыва реактивного слагаемого:

$$\varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, M, t, \varepsilon), \quad M \in D, \quad t \in \mathbb{R}$$

При постановке задач используются два варианта разрыва правой части уравнения:

$$1) f(u, M, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, M, t, \varepsilon), & \text{если } u \geq 0 \quad M \in \bar{D}, t \in \mathbb{R}; \\ f^{(-)}(u, M, t, \varepsilon), & \text{если } u < 0 \quad M \in \bar{D}, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$2) f(u, M, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, M, t, \varepsilon), & \text{если } M \in \bar{D}^{(+)}, t \in \mathbb{R}; \\ f^{(-)}(u, M, t, \varepsilon), & \text{если } M \in \bar{D}^{(-)}, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Здесь $f^{(\pm)}(u, M, t, \varepsilon)$ – достаточно гладкие функции в своих областях определения. В случае 2) предполагается, что существует простая гладкая замкнутая кривая C , которая делит область D на две части: $\bar{D}^{(+)}$, ограниченную кривой C , и $\bar{D}^{(-)}$, ограниченную кривыми C и ∂D .

Интерес к задачам такого вида обусловлен тем, что они подходят для моделирования физических явлений в средах с разрывными характеристиками.

Для указанных выше задач разработаны алгоритмы построения асимптотических приближений решений, обладающих большими градиентами в окрестностях границ разрыва правых частей. Эти окрестности называют внутренними переходными слоями. В работе сформулированы условия и доказаны теоремы о существовании, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову периодических по времени, а также стационарных решений задач указанного типа, содержащих внутренний переходный слой. Разработаны примеры, иллюстрирующие предлагаемые алгоритмы. Результаты получены путем развития асимптотического метода дифференциальных неравенств для задач с разрывными нелинейностями.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№МК-3005.2019).

ЛИТЕРАТУРА

1. Pao C. V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. New York: Plenum Press, 1992.
2. Павленко В. Н. Сильные решения периодических параболических задач с разрывными нелинейностями // *Дифференциальные уравнения*. 2016. Т. 52, № 4. С. 528–539.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // *Труды Математического Института имени В.А. Стеклова*. 2010. V. 268, С. 268–283.

**ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РЕЛЕЙНОЙ МОДЕЛИ
УРАВНЕНИЯ МЭККИ-ГЛАССА С ДВУМЯ
ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ**

**A PERIODIC SOLUTION OF A RELAY MODEL OF
THE MASKEY-GLASS EQUATION WITH TWO DELAYS**

М. М. Преображенская

ЯрГУ им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия;
rita.preo@gmail.com

Рассмотрим уравнение Мэки-Гласса с двумя запаздываниями (см. [1])

$$\dot{u} = -u + \frac{\alpha(u(t-1) + \delta u(t-h))}{1 + (u(t-1) + \delta u(t-h))^\gamma}. \quad (1)$$

Здесь $u = u(t)$ — неизвестная функция, $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\alpha, \delta > 0$ и $\gamma \gg 1$. Будем интересоваться построением периодического релаксационного цикла уравнения (1).

Введем новую неизвестную функцию $x = x(t)$ следующим образом:

$$\exp x = u(t-1) + \delta u(t-h).$$

В результате получим

$$\dot{x} = -1 + \frac{\alpha \exp(x(t-1) - x)}{1 + \exp(\gamma x(t-1))} + \frac{\beta \exp(x(t-h) - x)}{1 + \exp(\gamma x(t-h))}, \quad (2)$$

где $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \delta\alpha$. Уравнение (2) при $\gamma \rightarrow +\infty$ преобразуется в релейное уравнение

$$\dot{x} = -1 + \alpha \exp(x(t-1) - x)H(x(t-1)) + \beta \exp(x(t-h) - x)H(x(t-h)), \quad (3)$$

$$H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \exp(\gamma x)} = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

В рамках настоящей работы доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $h \in (1/2, 1)$, $\alpha > 0$, $\beta \geq e^{-h}(e^2 - 1)/(1 - h)$. Тогда решение уравнения (3) с начальной функцией из множества

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(t) : \varphi(t) > 0 \text{ при } t \in [-1, 0), \varphi(0) = 0\}$$

совпадает с одной и той же периодической функцией

$$x_*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -t, & t \in [0, h], \\ -t + \ln(\beta e^h(t - h) + 1), & t \in [h, 1], \\ -t + \ln((\alpha e + \beta e^h)t - \alpha e - \beta e^h h + 1), & t \in [1, 2h], \\ -t + \ln\left(\frac{1}{2}\beta^2 e^{2h}(t - 2h)^2 + \alpha\alpha(t - 1) - \beta e^h(h - t) + 1\right), & t \in [2h, t_0 + h], \\ -t + \ln\left(\alpha\alpha(t - 1) + \frac{1}{2}(\beta^2 e^{2h}(h - t_0)^2 + 2\beta e^h t_0 + 2)\right), & t \in [t_0 + h, 1 + h], \\ -t + \ln\left(-\alpha\alpha(\beta e^h(t - 2)(h - t + 1) - t + 1) + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2}\beta^2 e^{2h}(4h^2 - 2h(2t + t_0 - 1) + t^2 + t_0^2 - 1) - \right. \\ \quad \left. - \beta e^h(h - t - t_0 + 1) + 1\right), & t \in [1 + h, 1 + t_0], \\ -t + T_0, & t \in [1 + t_0, T_0], \end{cases}$$

$$x_*(t + T_0) \equiv x_*(t),$$

где t_0 — корень уравнения

$$-t + \ln(\beta e^h(t - h) + 1) = 0, \quad (4)$$

принадлежащий отрезку $[h, 1]$,

$$T_0 \stackrel{\text{def}}{=} \ln\left(-\beta e^h(h(\alpha\alpha(t_0 - 1) + 1) + t_0(\alpha(e - et_0) - 2)) + \alpha\alpha t_0 + \right. \\ \left. + \beta^2 e^{2h}(2h^2 - 3ht_0 - h + t_0^2 + t_0) + 1\right).$$

Отметим, что в силу наложенных в Теореме 1 ограничений на параметры корень t_0 уравнения (4) существует и единственен на отрезке $[h, 1]$. При этом функция $x_*(t)$ на отрезке $[0, T_0]$ длины периода устроена следующим образом: она равна нулю в точках $0, t_0, T_0$, отрицательна при $t \in (0, t_0)$ и положительна при $t \in (t_0, T_0)$.

В программе *Tracer V3.70*, разработанной Д. С. Глызиным, был проведен численный эксперимент, в результате которого для уравнения (2) найдено решение, визуально мало отличающееся от решения уравнения (3), описанного в Теореме 1. Это дает основание полагать, что у (2) существует периодическое решение, асимптотически близкое к решению релейного уравнения (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта (№ 18-29-10055).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tateno M., Uchida A.* Nonlinear dynamics and chaos synchronization in Mackey-Glass electronic circuits with multiple time-delayed feedback // *Nonlinear Theory Appl., IEICE.* 2012. V. 3, № 2. P. 155–164.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРБИТ
АСТЕРОИДОВ, БЛИЗКИХ К РЕЗОНАНСУ 3:1
NUMERIC MODELING OF ASTEROID ORBITS CLOSE
TO 3:1 RESONANCE**

А. Е. Розаев

ГАУК ЯО Центр имени В.В. Терешковой, Ярославль, Россия;
hegem@mail.ru

Как известно, динамическая эволюция частиц в резонансе 3:1J с Юпитером характеризуется очень быстрым увеличением их эксцентриситета. Это явление предсказано трудами Уиздома [1]. Кроме того, орбиты примерно половины частиц становятся пересекающимися с орбитой Земли в течение 1 миллиона лет из-за векового резонанса, действующего внутри резонанса 3:1. [2] Очевидно, интересно реконструировать динамическую историю реальных астероидов вблизи резонанса 3:1J в прошлом. Чтобы изучить движение вблизи резонанса 3:1 в наиболее простой форме, мы выполнили численные интеграции только с возмущениями от Юпитера. Мы интегрируем орбиты нескольких клонов с различными начальными полуосями, наклонами, эксцентриситетом и средней аномалией. В нашей серии интеграций были зафиксированы значения начальных долготы узла и аргумента перигелия. При большом эксцентриситете $e=0,5$ и начальной полуоси вдали от резонанса $a=2,45$ а.е. мы имеем малые колебания a и e . После приближения к резонансу $a=2,465$ а.е. мы имеем большие вариации a в диапазоне 2,47-2,53 а.е. вокруг резонансного значения и квазипериодические вариации e в диапазоне $e=0.4-0.84$. Основной период колебаний эксцентриситета примерно в шесть раз длиннее периода полуоси и составляет около 100 тысяч лет. Короткий период эксцентриситета сохраняет резонансное значение, а вариации эксцентриситета и полуоси находятся в противоположной фазе. При этом большие полуоси теряют зависимость от начального значения и становятся очень близкими к резонансному значению для всех начальных значений полуоси в диапазоне 2.48-2.52 а.е. Имеется четкая зависимость от начальной средней аномалии (т. е. от резонансного аргумента). Другая серия интегрирования с фиксированной начальной полуосью и переменным эксцентриситетом показывают, что при начальном эксцентриситете $e=0,3-0,5$ мы

имеем увеличение вековых возмущений в амплитуде эксцентриситета до 0,27. Во всех случаях короткопериодические резонансные возмущения малы. На основе наших численных интегрирований мы показали, что эволюция орбиты в резонансе 3:1J может быть описана в общем случае двумя независимыми параметрами – резонансным аргументом и скоростью прецессии перигелия. Эта простая модель дает способ количественного описания движения при резонансе в регулярном (нехаотическом) случае. Скорость прецессии перигелия определяет вариации векового эксцентриситета, прецессию узла и поведение наклона. Резонансный аргумент определяет резонансный эксцентриситет, полуоси и вариации наклона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wisdom J. Chaotic Behavior and the Origin of the 3/1 Kirkwood Gap. //Icarus. 1983. V. 56. p. 51–74.
2. Moons, M., Morbidelli, A. Secular resonance in mean motion commensurabilities: the 4/1, 3/1, 5/2, and 7/3 cases. //Icarus. 1995. V. 114, № 10. p. 33–50.

СВЕТОВЫЕ ПЕТЛИ НА СФЕРАХ В РАСШИРЕННОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ LIGHT LOOPS ON SPHERES IN AN EXPANDED HYPERBOLIC SPACE

Л. Н. Ромакина

*Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия; romakinaln@mail.ru*

**Исследование посвящается 100-летию со дня рождения
А. В. Погорелова (03.05.1919 – 17.12.2002)**

Обращаясь к классическим трудам А. Пуанкаре [1] и П. А. М. Дирака [2], сформулируем их общую идею, несколько оттеняя ее сообразно цели предстоящего доклада: «Каждая непротиворечивая геометрическая система может стать языком для описания тех или иных физических процессов». Руководствуясь данной идеей, мы продолжаем развивать геометрию пространства, смежного по абсолютности с пространством Лобачевского, пытаюсь параллельно наметить ее возможные приложения и объяснить причину тотального на данном этапе развития человеческой культуры выбора языка евклидовой

геометрии как основного средства естественно-научной коммуникации (см., например, [3, 4]).

Придерживаясь принятой в работах [5–7] терминологии, трехмерное расширенное гиперболическое пространство H^3 рассматриваем в проективной интерпретации Кэли–Клейна как проективное пространство P_3 с фиксированной в нем овальной гиперквадрикой γ , называемой *абсолютом* пространства H^3 и каждой из двух его компонент. На внутренней относительно γ компоненте пространства H^3 может быть реализована геометрия пространства Лобачевского Λ^3 , а на внешней — геометрия гиперболического пространства \hat{H}^3 вещественного радиуса кривизны ρ [см. 7, с. 210].

Все собственные прямые пространства Лобачевского являются гиперболическими, точнее, внутренними относительно γ ветвями гиперболических прямых. Каждая прямая пространства \hat{H}^3 по характеру общих точек с абсолютом может быть отнесена к одному из трех типов: эллиптическому, гиперболическому или параболическому [см. 6, 7]. Существуют также три типа плоскостей пространства \hat{H}^3 [8, 9]. Плоскости, пересекающие абсолют по нулевой (овальной) конике, являются *эллиптическими* (*гиперболическими положительной кривизны*). Плоскости, касательные к абсолюту, имеют с ним две общие мнимо сопряженные прямые и являются *коевклидовыми* [см. 7, 10].

Каждая собственная сфера пространства Лобачевского может быть отнесена к одному из трех типов: сферы, эквидистантные поверхности, орисферы [см. 6, 7]. В пространстве \hat{H}^3 в зависимости от типа радиуса сферы, обозначим его r , и типа расположения ее центра, скажем S , относительно гиперквадрики γ различаем следующие типы невырожденных сфер [11, п. 4.1]: 1) гиперсферы ($S \in \Lambda^3$, $r = i\pi\rho/2 + r_0$, где $r_0 \in \mathbb{R}$); 2) эллиптические сферы ($S \in \hat{H}^3$, r — мера отрезка эллиптической прямой, $r \in [0, \pi\rho/2]$); 3) гиперболические сферы ($S \in \hat{H}^3$, r — мера отрезка гиперболической прямой, $r \in \mathbb{R}$); 4) орисферы ($S \in \gamma$, $r = \infty$).

С каждой точкой пространства H^3 можно связать конус проходящих через нее касательных к абсолюту. Для внутренней (внешней) относительно γ точки этот конус, называемый *световым*, является мнимым (вещественным). Световые конусы точек абсолюта вырождаются в коевклидовы плоскости. Для поверхности в пространстве H^3 линии ее пересечения со световыми конусами точек поверхности являются геометрическими ковариантами, характеризующими тип

поверхности. Мы называем такие линии *световыми петлями* или *световыми линиями* поверхности [см. 8].

В пространстве Лобачевского световые петли не играют существенной роли в исследовании поверхностей, поскольку имеют не более одной вещественной точки. Но в пространстве \widehat{H}^3 световые петли поверхности, будучи линиями на вещественном конусе, позволяют более полно описывать изучаемые объекты, значительно обогащая своим наличием геометрию пространства. Использование световых линий позволило, например, провести в пространстве \widehat{H}^3 полную классификацию тетраэдров с негиперболическими гранями [см. 8].

В докладе будет представлено исследование световых петель на сферах пространства \widehat{H}^3 . Невырожденная световая петля на сфере этого пространства является овальной линией, а каждая овальная линия пространства \widehat{H}^3 в зависимости от содержащей ее плоскости может быть отнесена к одному из двадцати типов [см. 4–7, 10, 12–14]. Мы определяем типы световых петель для каждого типа сфер и находим основные инварианты исследуемых линий. Где это возможно, вычисляем площадь «тени», т. е. площадь сферического сегмента, ограниченного световой петлей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1990.
2. Дирак П. А. М. Совершенство теории тяготения Эйнштейна. М.: Наука, 1967.
3. Romakina L. N. An eye as the tool of a choice of the Euclidean metric for the description of real physical space // Journal of Basic and Applied Research International, ИКР. 2015. V. 9, № 3. P. 147–154.
4. Ромакина Л. Н. Развитие представлений о геометрии окружающего пространства // Евразийское научное объединение. 2015. Т. 1, № 10(10). С. 18–21.
5. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.: Наука, 1974.
6. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М.–Л.: ОНТИ СССР, 1936.
7. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.
8. Ромакина Л. Н. Классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в гиперболическом пространстве положительной кривизны // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, № 2. С. 208–221.
9. Romakina L. N. Dihedrons of a hyperbolic three-space of positive curvature // International Electronic Journal of Geometry. 2016. Т. 9, № 2. P. 50–58.
10. Ромакина Л. Н. Геометрия коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008.
11. Ромакина Л. Н. Объем конечного ортогонального h -конуса в гиперболическом пространстве положительной кривизны // Proceedings of the International Geometry Center. 2017. Т. 10, № 2. С. 56–71.

12. Ромакина Л. Н. Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 37–44.
13. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 частях. Ч. 1: Тригонометрия. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2013.
14. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 частях. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2013.

ГЕНЕРАТИВНО-ДИСКРИМИНАТИВНАЯ НЕЙРОСЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛА АВТОРА ТЕКСТА НА ОГРАНИЧЕННЫХ ВЫБОРКАХ

GENERATIVE-DISCRIMINATIVE NEURAL MODEL FOR SOLVING THE TASK OF DETERMINING OF AUTHOR'S GENDER WITH LIMITED TRAINING SETS

А. Г. Сбоев^{1,2}, И. А. Молошников¹, Р. Б. Рыбка¹,
А. В. Грязнов¹

¹Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Российская Федерация; sag111@mail.ru

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия; sag111@mail.ru

Генеративно-дискриминативные нейросетевые модели (GAN) в настоящее время зарекомендовали себя эффективным инструментом решения задач распознавания изображений. В то же время для задачи классификации текстов эти модели мало применялись, хотя в той области существует дефицит ресурсоемких размеченных выборок, что делает развитие GAN для этой области весьма актуальным. В данной работе в качестве задачи, которая выбрана для апробации разработанного подхода, является автоматическое определение признаков авторского профиля. Работа посвящена исследованию методов, основанных на применении GAN моделей, для задачи классификации текстов. Данный подход принадлежит к классу алгоритмов обучения с частичным привлечением учителя. Целью данной работы является исследование и создание на основе архитектуры GAN классификатора, определяющего пол автора русскоязычного текста.

Основными элементами используемой нами GAN архитектуры являются рекуррентные, сверточные и полносвязные нейросетевые слои. Генеративная часть состоит из классификатора и вариационного автоэнкодера. Последний динамически настраивается: кодировать входные примеры в пространство скрытых переменных, распределенных по нормальному закону, и декодировать их из него с использованием меток класса входного примера (пола автора текста), либо известных (в случае размеченного множества) или предсказанных классификатором (в случае - неразмеченного). Процесс обучения итеративный, вначале учится генеративная часть, и далее вся модель GAN. При этом в процессе динамического обучения генеративной модели используется составная функция ошибки на основе: а) средней квадратичной ошибки классификатора, б) дивергенции Кульбака-Лейблера при обучении кодировщика в составе вариационного автоэнкодера, в) ошибки восстановления исходного примера на этапе декодирования из пространства скрытых переменных и метки класса анализируемого текста. Обучение единой модели включает настройку дискриминатора, задача которого определение был ли поданный пример сгенерирован автоэнкодером или получен из исходного множества.

В качестве множества примеров для обучения выбрана часть корпуса текстов блогов LiveJournal [1] длиной менее 250 слов. Выбранная часть текстов корпуса содержит 3967 текстов от 1872 авторов LiveJournal, средняя длина текста: 13 предложений, 214 слов. Соотношение текстов от авторов разного пола: 1429 от женщин и 2538 от мужчин. Для предварительной обработки текстов используется инструмент UDpipe [2]. Для дальнейших экспериментов использовались векторизация текста на базе бинарного кодирования (one-hot) [3] морфологических признаков слов и метода главных компонент [4], а также балансировка по количеству текстов по классам.

Исследованы различные режимы обучения и в результате установлено, что лучшие точности достигаются при соотношении итераций обучения дискриминативной и генеративных частей модели, как 1 к 2. Т.е. при пакетном режиме обучения на одну итерацию обновления весов дискриминатора осуществляется 2 итерации обновления весов генератора. В результате экспериментов определено, что применение обучения на основе GAN архитектуры целесообразно при наличии ограниченного множества размеченных примеров и неразмеченной части, отражающей генеральную совокупность для

решаемой задачи классификации. Для определения состава размеченной части был построен график зависимости точности классификационной модели при увеличении набора размеченного множества примеров, используемых для обучения. Выборка более чем из 1 тысячи примеров приводит к практически постоянной точности классификационной модели, поэтому такой объем данных выбран в качестве множества размеченных примеров. В дальнейших экспериментах размер размеченного множества варьировался. При обучении на 128, 224 и 416 размеченных текстах, дообучение на 1000 размеченных текстах с использованием GAN подхода позволяет повысить точность классификации на 2%. Более значимым является уменьшение разброса в результатах. При маленьких тренировочных выборках разброс настолько велик, что вообще не дает возможности оценить точность классификации, в то время как использование обучения на размеченном множестве снижает этот разброс в 2-3 раза и делает его приемлемым. Так например при обучении на 128 текстах средняя точность классификатора равна 59% при разбросе 12%, а после дообучения средняя точность равна 62% с разбросом от 5%. С увеличением размеченной выборки эффект от применения GAN архитектуры уменьшается.

Таким образом, можно сделать вывод, что подхода обучения классификатора определения признака пола автора текста на основе GAN подхода эффективен при наличии небольшой части размеченных примеров и достаточного числа размеченных примеров.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-29-10084) и с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Litvinova T. A., Sboev A. G., Panicheva P. V.* Profiling the Age of Russian Bloggers //Conference on Artificial Intelligence and Natural Language. – Springer, Cham, 2018. – С. 167-177.
2. *Straka M., Straková J.* Tokenizing, pos tagging, lemmatizing and parsing ud 2.0 with udpipes //Proceedings of the CoNLL 2017 Shared Task: Multilingual Parsing from Raw Text to Universal Dependencies. – 2017. – С. 88-99.
3. *Harris D., Harris S.* Digital design and computer architecture (2nd ed.). San Francisco, Morgan Kaufmann, 2013.
4. *Tipping M. E., Bishop C. M.* Probabilistic principal component analysis //Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). – 1999. – Т. 61. – №. 3. – С. 611-622.

ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ СИНАПТИЧЕСКИХ ВЕСОВ
НЕЙРОНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ
SPIKE-TIMING-DEPENDENT PLASTICITY С
ОГРАНИЧЕННОЙ СИММЕТРИЧНОЙ СХемой
УЧЁТА ПАР СПАЙКОВ
SYNAPTIC WEIGHT CHANGE ESTIMATE OF A
NEURON WITH SPIKE-TIMING-DEPENDENT
PLASTICITY WITH THE RESTRICTED SYMMETRIC
SPIKE PAIRING SCHEME

А. Г. Сбоев^{1,2}, Р. Б. Рыбка¹, А. В. Серенко¹

¹Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Москва, Россия; Sboev_AG@nrcki.ru

²Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, Россия

В работе представлен метод оценки среднего изменения синаптических весов нейрона Integrate-and-Fire под действием модели синаптической пластичности Spike-Timing-Dependent Plasticity (STDP). STDP [1] – хеббова модель долговременной синаптической пластичности, в которой изменение Δw веса $0 \leq w \leq 1$ экспоненциально зависит от разности моментов t_{pre} и t_{post} пресинаптических и постсинаптических спайков:

$$\Delta w(\Delta t) = \begin{cases} -A^- \cdot \exp\left(-\frac{t_{\text{pre}} - t_{\text{post}}}{\tau^-}\right) & \text{при } t_{\text{pre}} - t_{\text{post}} > 0; \\ A^+ \cdot \exp\left(-\frac{t_{\text{post}} - t_{\text{pre}}}{\tau^+}\right) & \text{при } t_{\text{pre}} - t_{\text{post}} < 0. \end{cases}$$

Изучение STDP актуально ввиду возможности её аппаратной реализации в нейроморфных вычислительных устройствах на основе мемристоров [2]. Важным свойством STDP, которое можно использовать для решения спайковыми нейронами задачи классификации [3], является стабилизация средней выходной частоты спайкования нейрона: под действием рассматриваемой STDP устанавливаются синаптические веса, обеспечивающие определённую выходную частоту, которая зависит от параметров нейрона и от констант STDP, но не зависит от входных частот (в достаточно широком их диапазоне). В данной работе рассматривается STDP с той

схемой учёта пар спайков, с которой наблюдается данный эффект, – «ограниченной симметричной» схемой, в которой каждый пре-спайк может не более чем единожды быть учтён в акте увеличения веса «пост- после пре-», а каждый пост-спайк – не более чем единожды в акте уменьшения веса «пре- после пост-».

Целью данной работы, в продолжение существующих аналитических подходов к оценке среднего изменения веса [4], является включение в такую оценку вносимой нейроном корреляции выходной последовательности спайков со входными. Рассматривается модель нейрона Integrate-and-Fire без утечки и без рефрактерности; каждый спайк, приходящий с синапса с весом w_i , увеличивает мембранный потенциал нейрона (безразмерный) на w_i . При достижении потенциалом порогового значения Θ он скачком сбрасывается в ноль, и нейрон испускает спайк. Тогда для каждого выходного спайка вероятность того, что последний входной спайк, переполнивший потенциал нейрона, пришёл с i -го входа, справедливо считать равным среднему вкладу (за единицу времени) i -го входа в потенциал нейрона по отношению ко вкладам всех входов: $\frac{\nu_{in}^i w_i}{\sum_j \nu_{in}^j w_j}$, где ν_{in}^i – средняя частота прихода спайков на i -й вход. Такой последний входной спайк, совпав по времени с выходным, вызовет увеличение веса i -го входа на A^+ .

В рассматриваемой схеме учёта пар спайков увеличение/уменьшение веса вызывают только пары из подряд идущих спайков, из которых первый пресинаптический, а второй – постсинаптический, или наоборот, соответственно. При частоте входных спайков ν_{in}^i , а выходных ν_{out}^i , и те, и другие пары происходят с частотой $\frac{\nu_{in}^i \nu_{out}^i}{\nu_{in}^i + \nu_{out}^i}$. Среднее изменение синаптического веса i -го входа за единицу времени равно произведению частоты актов изменения веса на математическое ожидание изменения веса:

$$\frac{\nu_{in}^i \nu_{out}^i}{\nu_{in}^i + \nu_{out}^i} \int_{-\infty}^0 \delta w(\Delta t) p_{\Delta t < 0}(\Delta t) d\Delta t + \frac{\nu_{in}^i \nu_{out}^i}{\nu_{in}^i + \nu_{out}^i} \int_0^{+\infty} \delta w(\Delta t) p_{\Delta t \geq 0}(\Delta t) d\Delta t$$

Примем далее упрощение, что если некоторый входной спайк не вызвал немедленного возбуждения нейрона, то момент следующего возбуждения нейрона не зависит от момента этого входного спайка. Действительно, момент возбуждения нейрона будет тогда определяться моментами последующих входных спайков, которые

от момента текущего входного спайка не зависят, поскольку входные последовательности пуассоновские. Тогда время Δt от пресинаптического спайка до первого следующего постсинаптического спайка либо равно 0 (с вышеуказанной вероятностью), либо, в противном случае, распределено как время ожидания пуассоновского события, учитывая только, что за время Δt не произошло других пресинаптических и постсинаптических спайков (как требует рассматриваемая схема учёта).

Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta w) = & \nu_{\text{in}}^i \nu_{\text{out}} \cdot \frac{A_-}{\nu_{\text{in}}^i + \nu_{\text{out}} + \frac{1}{\tau_-}} + \nu_{\text{in}}^i \nu_{\text{out}} \left(1 - \frac{\nu_{\text{in}}^i w_i}{\sum_j \nu_{\text{in}}^j w_j} \right) \cdot \frac{A_+}{\nu_{\text{in}}^i + \nu_{\text{out}} + \frac{1}{\tau_+}} + \\ & + \frac{\nu_{\text{in}}^i \nu_{\text{out}}}{\nu_{\text{in}}^i + \nu_{\text{out}}} A_+ \cdot \frac{\nu_{\text{in}}^i w_i}{\sum_j \nu_{\text{in}}^j w_j}. \end{aligned}$$

Данная оценка находится в согласии с результатами численной симуляции. Вместе с тем, благодаря её простоте её можно адаптировать для учёта влияния на результат STDP таких свойств входных последовательностей, как, например, их взаимная корреляция, что является задачей для дальнейшей работы.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №17-71-20111 и с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.

ЛИТЕРАТУРА

1. Morrison A., Diesmann M., Gerstner W. Phenomenological models of synaptic plasticity based on spike timing // *Biological Cybernetics*. 2008. Vol. 98. P. 459–478.
2. Serrano-Gotarredona T., Masquelier T., Prodromakis Th., Indiveri G., Linares-Barranco B. STDP and STDP variations with memristors for spiking neuromorphic learning systems // *Frontiers in neuroscience*. 2013. Vol. 7. P. 2.
3. Sboev A., Rybka R., Serenko A. On the effect of stabilizing mean firing rate of a neuron due to STDP. // 6th International Young Scientist Conference on Computational Science. Elsevier, 2017. Vol. 119. P. 166–173.
4. Izhikevich E., Desai, N. Relating STDP to BCM. // *Neural computation*. Vol. 15, № 7. P. 1511–1523

**ХАРАКТЕР ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ
УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО-СИВАШИНСКОГО В
РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ**

**THE NATURE OF LOCAL BIFURCATIONS OF THE
KURAMOTO-SIVASHINSKY EQUATION IN DIFFERENT
AREAS**

А. В. Секацкая

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль, Россия; a.sekatskaya@uniyar.ac.ru*

В докладе рассматривается обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского, представляющее собой нелинейное уравнение с частными производными параболического типа в случае, когда неизвестная функция зависит от двух пространственных переменных: времени t и двух пространственных переменных x, y

$$u_t = -b\Delta_\mu u - \Delta_\mu^2 u + u_x^2 + \mu u_y^2. \quad (1)$$

Данное уравнение, моделирующее процесс формирования неоднородного нанорельефа на поверхности полупроводников, рассмотрено в прямоугольнике, т.е. когда $(x, y) \in \bar{D} = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$, включая квадрат ($l_1 = l_2$), а также в равнобедренном треугольнике $\bar{D}_\Delta = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq x\}$ вместе с однородными краевыми условиями Дирихле, т.е., когда $u_1|_{\partial D} = 0, \Delta u_1|_{\partial D} = 0$. Здесь через ∂D обозначена граница соответствующей области. Наконец, $\mu = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2$, $\Delta_\mu u = u_{xx} + \mu u_{yy}$, $b_1 \in \mathbb{R}$, $d_1 > 0$ (см. [1], а также [2–4]).

Если рассматривается первый вариант задачи (D — прямоугольник), то $\bar{D} = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$, а случай квадрата выделяется равенством $\mu = 1$. Во втором варианте выбора области теперь $\bar{D}_\Delta = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x\}$.

При анализе уравнения (1) в области D это уравнение следует дополнить краевыми условиями

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=\pi} = 0, \\ u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=\pi} = u_{yy}|_{y=0} = u_{yy}|_{y=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При анализе уравнения (1) в треугольнике D_Δ краевые условия приобретают следующий вид

$$\begin{aligned} u \Big|_{x=\pi} &= u \Big|_{y=0} = u \Big|_{x=y} = 0, \\ u_{xx} \Big|_{x=\pi} &= u_{yy} \Big|_{y=0} = u_{xx} + u_{yy} \Big|_{x=y} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Краевая задача (КЗ) (1), (2) без нарушения общности может быть рассмотрена при $\mu \geq 1$. Случай $\mu < 1$ может быть сведен к первому заменой независимых переменных $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$. Вариант $\mu = 1$ можно включить в анализ как частный случай.

Пусть рассматриваемая область является прямоугольником. Справедливо утверждение.

При $b < 1 + \mu$ однородные состояния равновесия $u(t, x) = const$ устойчивы и теряют устойчивость, если $b > 1 + \mu$. При этом, если $b = 1 + \mu + \gamma\varepsilon$, ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, $\gamma = \pm 1$), то справедливо утверждение.

Теорема 1. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (1), (2) имеет устойчивое пространственно неоднородное решение

$$u(t, x, y, \varepsilon) = -\frac{9\pi^2\gamma}{32}\varepsilon \sin x \sin y + o(\varepsilon). \tag{4}$$

Вопрос о локальных бифуркациях может быть сведен к анализу нормальной формы вида

$$z' = (1 + \mu) \left(\gamma z + \frac{32z^2}{9\pi^2} \right). \tag{5}$$

Если область представляет собой квадрат, то результат остается тем же самым, только в соответствующие формулы необходимо вместо μ подставить 1.

Рассмотрим далее в качестве области равнобедренный треугольник. То есть будет изучаться краевая задача (1), (3). Бифуркационная задача возникает при $b = 5 + \gamma\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Справедливо утверждение.

Теорема 2. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нелинейная краевая задача (1), (3) имеет одно устойчивое состояние равновесия, если $\gamma > 0$

$$u(x, y, \varepsilon) = -\frac{5\pi^2\gamma}{27}\varepsilon(\sin x \sin 2y - \sin 2x \sin y) + O(\varepsilon^2).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.А. Куликов, А.В. Секацкая. О влиянии геометрических характеристик области на структуру нанорельефа. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 3. С. 293–304.
3. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. V. 52. №5. P. 800–814.
4. Kulikov A. N., Sekatskaya A. V. Local attractors in the one Kuramoto-Sivashinsky boundary - value problem // Itogi Nauki i Techniki. VINITI RAN. 2018. V. 148. P. 58–65.
5. Kulikov A. N., Kulikov D. A. The Kuramoto–Sivashinsky Equation. A Local Attractor Filled with Unstable Periodic Solutions // Automatic Control and Computer Sciences. 2018. V. 52. 8 p.

WILD ATTRACTOR IN THE MODEL OF ROTATOR-OSCILLATOR COUPLED VIA RIGHT HAND SIDES

N. V. Barabash^{1,2,3}, V. N. Belykh^{1,2}

¹Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia;

²Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, Russia;

³barabash@itmm.unn.ru

We consider the dynamics of 4D-system of coupled rotator and oscillator

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \lambda\dot{\varphi} + \sin \varphi - \gamma &= \mu(x + a\dot{x}), \\ \ddot{x} + h\dot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon(\gamma - \sin \varphi - b\dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (1)$$

where $\varphi \in \mathbb{S}^1$, $x \in \mathbb{R}^1$ are dynamical variables and $\lambda, \gamma, \mu, a, h, \omega, \varepsilon, b$ are positive parameters.

The system (1) models the dynamic behavior of a superconducting Josephson junction interacting with a resonator [1-5]. The system (1), like the well-known pendulum equation, has two equilibrium states $e_1(\varphi = \arcsin \gamma, \dot{\varphi} = 0, x = 0, \dot{x} = 0)$, $e_2(\varphi = \pi - \arcsin \gamma, \dot{\varphi} = 0, x = 0, \dot{x} = 0)$. In our talk, the following four statements about the system (1) are rigorously proved:

- a) There exists a parameter region G_1 for which an attracting invariant domain D containing equilibrium states e_1 and e_2 exists in the phase space of the system (1);
- b) There exists a parameter region G_2 for which the equilibrium state e_2 is a saddle-focus with a one-dimensional unstable manifold W^u and a three-dimensional stable manifold W^s , and the eigenvalues p^u and $p_i^s, i = 1, 2, 3$ of the subspaces E^u and E^s , tangent at the point e_2 to W^u and W^s respectively, satisfy the conditions:

$$p_3^s < 0 < p^u \text{ are real, } p_1^s \text{ and } p_2^s \text{ are complex conjugate and} \\ p^u + 2\text{Re } p_1^s + p_3^s < 0, p^u + 2\text{Re } p_1^s > 0;$$

- c) In the parameter space of the system (1) there exists a set G_3 corresponding to the existence of a homoclinic orbit of the saddle-focus e_2 ;
- d) $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \neq \emptyset$.

These statements are necessary conditions for the birth of a strange attractor — an attracting set of entire unstable trajectories, as well as a wild attractor whose trajectories have unstable manifolds of different dimensions [6, 7].

This work was supported by the RFBR under grant No. 18-01-00556 (to V.B. and N.B.) and the RSF (numerics) under grant No. 19-72-10128 (to N.B.).

REFERENCES

1. Belykh V.N., Pedersen N.F. and Soerensen O.H. Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case // Physical Review B. 1977. V. 16, № 11. C. 4853–4859.
2. Belykh V.N., Pedersen N.F. and Soerensen O.H. Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case // Physical Review B. 1977. V. 16, № 11. C. 4860–4871.
3. Likharev K.K., Ul'rikh B. T. Systems with Josephson Junctions (in Russian). Moscow: Moscow Univ. Publ., 1978.
4. Likharev K.K. Introduction to the Dynamics of Josephson Junctions (in Russian). Moscow: Nauka, 1985.
5. Belykh V.N., Verichev N.N. Dynamics of a rotator coupled with an oscillator // Radiophysics and Quantum Electronics. 1988. V. 31, № 8. C. 657–663.
6. Belykh V.N., Pankratova E. V. Shilnikov chaos in oscillators with Huygens coupling // Int. J. Bifurc. Chaos. 2014. V. 24, № 8. C. 1440007.
7. Belykh V.N. Homoclinic and heteroclinic orbits of a family of multidimensional dynamical systems // Proc. Steklov Inst. Math. Dynamical Systems and Related Topics: Collections of Articles, (to the 60th Anniversary of Academician D. V. Anosov). Moscow: Nauka, 1997. C. 14–26.

**VARIOUS MODELS OF THE ROLLING OF A BALL
WITH VARYING MASS DISTRIBUTION ON A PLANE
AS A GENERALIZATION OF THE CHAPLYGIN
PROBLEM**

A. V. Borisov^{1,2}, I. S. Mamaev^{1,2}, I. A. Bizyaev^{1,2}

¹ *Moscow Institute of Physics and Technology,
Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, 141700 Russia;*

² *Center for Technologies in Robotics and Mechatronics Components,
Innopolis University,
ul. Universitetskaya 1, Innopolis, 420500 Russia;
borisov@rcd.ru; mamaev@rcd.ru; bizaev_90@mail.ru*

This paper addresses the problem of the rolling of a spherical shell with a frame rotating inside, on which rotors are fastened. It is assumed that the center of mass of the entire system is at the geometric center of the shell.

For the rubber rolling model and the classical rolling model it is shown that, if the angular velocities of rotation of the frame and the rotors are constant, then there exists a noninertial coordinate system (attached to the frame) in which the equations of motion do not depend explicitly on time. The resulting equations of motion preserve an analog of the angular momentum vector and are similar in form to the equations for the Chaplygin ball. Thus, the problem reduces to investigating a two-dimensional Poincaré map.

The case of the rubber rolling model is analyzed in detail. Numerical investigation of its Poincaré map shows the existence of chaotic trajectories, including those associated with a strange attractor. In addition, an analysis is made of the case of motion from rest, in which the problem reduces to investigating the vector field on the sphere S^2 .

**SYMMETRIC POWERS,
COMMUTING POLYNOMIAL HAMILTONIANS
AND HYDRODYNAMIC TYPE SYSTEMS**

V. M. Buchstaber^{1,2}, A. V. Mikhailov^{1,3}

¹*Centre of Integrable Systems, Demidov Yaroslavl State University,
Russia;*

²*Steklov Mathematical Institute, RAS, Moscow, Russia;
buchstab@mi.ras.ru*

³*University of Leeds, Leeds, UK; a.v.mikhailov@leeds.ac.uk*

With every positive integer N and a polynomial $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \neq 0$ we associate a family of N polynomial Hamiltonian integrable systems on \mathbb{C}^{2N} with commuting Hamiltonians. The degree of the polynomial $F(x, y)$ does not depend on N . Our construction is based on a canonical transformation of the co-tangent bundle $T^*\mathbb{C}^N$, while the method of integration of the system uses explicit form of the bi-rational equivalence $\text{Sym}^N(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}^{2N}$ given by this transformation. As a byproduct we obtain integrable hierarchies of Hydrodynamic type systems and a wide class of their explicit solutions. In the talk we present recent developments of our results published in [1,2,3].

REFERENCES

1. Buchstaber V. M., Mikhailov A. V. The space of symmetric squares of hyperelliptic curves and integrable Hamiltonian polynomial systems on \mathbb{R}^4 // arXiv: 1710.00866 v1 [nlin.SI] 2 Oct 2017
2. Бухштабер В. М., Михайлов А. В. Бесконечномерные алгебры Ли, определяемые пространством симметрических квадратов гиперэллиптических кривых // Функц. Анализ и его прилож. 2017, 51:1, 4–27.
3. Бухштабер В. М., Михайлов А. В. Полиномиальные гамильтоновы интегрируемые системы на симметрических степенях плоских кривых // УМН, 2018, 73:6(444), 193–194

ENTROPY OF AN OPERATOR

D. V. Treschev

Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia;

`treschev@mi.ras.ru`

We extend the concept of the measure entropy from the group of automorphisms of a measure space to the group of unitary operators on a Hilbert space. Our main motivations concern formalization of the idea of quantum chaos. The key ingredient of our construction is a (probably) new concept from functional analysis, the dimension of a (bounded) operator.

Научное издание

“ДИНАМИКА. 2019. ЯРОСЛАВЛЬ”

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Международная научная конференция
Ярославль, 10–12 октября 2019 г.

Компьютерный набор, верстка А.О. Толбей

Подписано в печать 07.10.19. Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 8,62. Заказ № 19074. Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова,
150003, г. Ярославль, ул. Советская, 14.