Секция «Логика»

Симуляция непрямых правил вывода в классических пропозициональных исчислениях

Научный руководитель – Шангин Василий Олегович

Кожемяченко Даниил Андреевич

Студент (бакалавр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Философский факультет, Кафедра логики, Москва, Россия

E-mail: kodaniil@yandex.ru

Мы рассматриваем различные классические пропозициональные исчисления над языком $\{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$, полученные путем добавления к Гильбертовскому исчислению различных правил вывода, позволяющих исключать допущения (непрямые правила) в произвольном порядке. Такие исчисления мы договариваемся называть «системами с правилами общего вида». Идею этих исчислений мы берем у Басса и Боне из [1].

Все рассматриваемые исчисления используют схожие определения вывода. Каждый шаг доказательства в рассматриваемых исчислениях имеет вид $\Gamma \vDash A$, где Γ — множество формул, A — формула. Через $\Gamma, A \vDash C$ сокращенно обозначаем $\Gamma \cup \{A\} \vDash C$. Во всех рассматриваемых исчислениях четыре правила вывода:

1) $\vDash A$, где A случай схемы аксиом
2) $\{A\} \vDash A$, где A формула из Γ или допущение
3) mp_g — $\dfrac{\Gamma \vDash A \quad \Delta \vDash A \supset B}{\Gamma \cup \Delta \vDash B}$
4) непрямое правило вывода одного из следующих видов в зависимости от исчисления

   а) $d\mathcal{F}$.
   dr_g — $\dfrac{\Gamma \vDash B}{\Gamma \setminus \{A\} \vDash A \supset B}$.

   б) $\mathrm{int}\mathcal{F}$.
   int_g — $\dfrac{\Gamma, A \vDash B \supset C \quad \Delta \vDash B}{\Gamma \cup \Delta \vDash A \supset C}$.

   в) $\mathrm{cut}\mathcal{F}$.
   cut_g — $\dfrac{\Gamma \vDash A \quad \Delta, A \vDash B}{\Gamma \cup \Delta \vDash B}$.

   г) $\supset_e^i \mathcal{F}$.
   $\supset_e^i$ — $\dfrac{\Gamma_1 \vDash A \supset B \quad \Gamma_2 \vDash A \quad \Gamma_3, B \vDash C}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vDash C}$.

   д) $\wedge_e^i \mathcal{F}$ (два варианта).
   $\wedge_e^i$ — $\dfrac{\Gamma \vDash A \wedge B \quad \Delta, A \vDash C}{\Gamma \cup \Delta \vDash C}$ or $\dfrac{\Gamma \vDash A \wedge B \quad \Delta, B \vDash C}{\Gamma \cup \Delta \vDash C}$.

   е) $\vee_e^i \mathcal{F}$ (два варианта).
   $\vee_e^i$ — $\dfrac{\Gamma, A \vee B \vDash C \quad \Delta \vDash A}{\Gamma \cup \Delta \vDash C}$ or $\dfrac{\Gamma, A \vee B \vDash C \quad \Delta \vDash B}{\Gamma \cup \Delta \vDash C}$.

   ж) $p\mathcal{F}$.
   $\supset_p$ — $\dfrac{\Gamma, A \supset B \vDash A}{\Gamma \vDash A}$.

   з) $n\mathcal{F}$.
   nr_g — $\dfrac{\Gamma \vDash B \quad \Delta \vDash \neg B}{(\Gamma \cup \Delta) \setminus \{A\} \vDash \neg A}$ где A — произвольное допущение из $\Gamma \cup \Delta$

и) $o_1\mathcal{F}$.

or_{1g} — $\dfrac{\Gamma_1 \vDash A \vee B \quad \Gamma_2, A \vDash C \quad \Gamma_3, B \vDash C}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vDash C}$.

к) $o_2\mathcal{F}$.

or_{2g} — $\dfrac{\Gamma_1 \vDash A \vee B \quad \Gamma_2, A \vDash C \quad \Gamma_3, \neg A \wedge B \vDash C}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vDash C}$.

л) $o_3\mathcal{F}$

or_{3g} — $\dfrac{\Gamma_1 \vDash A \vee B \quad \Gamma_2, B \vDash C \quad \Gamma_3, A \wedge \neg B \vDash C}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vDash C}$

м) $o_4\mathcal{F}$.

or_{4g} — $\dfrac{\Gamma_1 \vDash A \vee B \; \Gamma_2, A \wedge B \vDash C \; \Gamma_3, A \wedge \neg B \vDash C \; \Gamma_4, \neg A \wedge B \vDash C}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \vDash C}$.

Вывод формулы A из множества формул Γ определяем как конечную последовательность секвенций, каждая из которых получена по одному из правил вывода, и последняя из которых является $\Gamma \vDash A$.

Можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Исчисления $d\mathcal{F}$, $n\mathcal{F}$, $o_1\mathcal{F}$, $o_2\mathcal{F}$, $o_3\mathcal{F}$, $o_4\mathcal{F}$, $\mathrm{int}\mathcal{F}$ линейно симулируют друг друга.

Теорема 2. Исчисления $\supset^i_e\mathcal{F}$, $\vee^i_e\mathcal{F}$, $\wedge^i_e\mathcal{F}$ линейно симулируют друг друга.

Теорема 3. Исчисления $\supset^i_e\mathcal{F}$, $\vee^i_e\mathcal{F}$, $\wedge^i_e\mathcal{F}$, а также исчисление $p\mathcal{F}$ квадратично симулируют исчисления $d\mathcal{F}$, $n\mathcal{F}$, $o_1\mathcal{F}$, $o_2\mathcal{F}$, $o_3\mathcal{F}$, $o_4\mathcal{F}$, $\mathrm{int}\mathcal{F}$.

Теорема 4. Гильбертовское исчисление квадратично симулирует все рассмотренные исчисления.

Источники и литература

1) Buss S. R. and Bonet M. L. The deduction rule and linear and near-linear proof simulations. The Journal of Symbolic Logic, 58(2):688–709, Jun. 1993.