Уравнение переноса с разрывными коэффициентами

Кондратьева Юлия Андреевна, Ровенская Елена Александровна

Аспирант, научный сотрудник

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: kond.yulia@cs.msu.ru, rovenska@iiasa.ac.at

В настоящей работе мы рассматриваем начально-краевую задачу для уравнения переноса. Особенности задачи состоят в нелокальности краевого условия, а также разрывности коэффициентов и начальных условий. В работе даётся определение обобщённого решения, построенного по методу характеристик. Постановка задачи мотивирована моделями популяционной динамики такими как, например, модель роста леса.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения переноса, возникающую при моделировании роста леса:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + g(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = -\mu(x)u(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad (x \in [0,L]), \tag{2}$$

$$u(t,0) = p(t) + \int_0^L \beta(x)u(t,x)dx \quad (t \in [0,T]). \tag{3}$$

Здесь $T > 0$, $g(\cdot)$ – заданная положительная отделимая от нуля ограниченная измеримая по Лебегу функция на R^1, $g \in L_2(R^1)$, $\mu(\cdot)$ – заданная измеримая по Лебегу ограниченная функция на R^1, $u_0(\cdot)$ – заданная измеримая по Лебегу ограниченная финитная функция на $[0,L]$, $p(\cdot)$ – заданная измеримая по Лебегу ограниченная функция, $\beta(\cdot)$ – заданная измеримая по Лебегу ограниченная функция на $[0,L]$. В дальнейшем будем также предполагать, что функция $1/g(\cdot)$ суммируема на любом конечном интервале. Для исходной задачи достаточно определения функции $g(\cdot)$ на $[0,L]$, но для удобства мы определяем функцию $g(\cdot)$ на R^1.

Рассмотрев исходное дифференциальное уравнение, мы можем построить соответствующее ему характеристическое уравнение и построить его решение.

$$\frac{dt(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{g(\lambda)}, \tag{4}$$

$$t(x_0) = t_0. \tag{5}$$

Теорема 1. *Для любого $(t_0, x_0) \in [0,T] \times R^1$ существует единственное решение дифференциального уравнения (4) с начальным условием (5). Это решение является решением уравнения $\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} g(\lambda(s))ds + x_0$.*

Решением начально-краевой задачи (1)–(3) по методу характеристик будем называть пару $(u(\cdot,\cdot), a(\cdot))$, где $u(\cdot,\cdot) : [0,T] \times [0,L] \mapsto R^1$ и $a(\cdot) : [0,T] \mapsto R^1$ измеримые по Лебегу ограниченные функции, удовлетворяющие следующим условиям

$$u(t,x) = \begin{cases} a(\tau(t,x)) \exp\left(-\int_{\tau(t,x)}^{t} \mu(\lambda(s;t,x))ds\right), & x \in [0, \lambda(t;0,0)) \\ u_0(\lambda(0;t,x)) \exp\left(-\int_0^t \mu(\lambda(s;t,x))ds\right), & x \in [\lambda(t;0,0), L] \\ & ((t,l) \in [0,T] \times [0,L]) \end{cases} \tag{6}$$

$$a(t) = p(t) + \int_0^L \beta(x)u(t,x)dx \quad (t \in [0,T]). \tag{7}$$

Где $\lambda(t;0,0)$ — характеристика, проходящая через точку $t = 0, x = 0$; точка $\tau(t,x) \in [0,T]$ такая, что $\lambda(\tau(t,x), t, x) = 0$.

Теорема 2. *Решение начально-краевой задачи (1)–(3) по методу характеристик существует и единственно как элемент $L_2([0,T] \times [0,L]) \times L_2[0,T]$.*

Представленный выше формализм стыкуется с формализмом, представленным С.Н. Кружковым (суженным на ограниченную область): если принять в исходной задаче (1)–(3) $g(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ непрерывно дифференцируемыми, то построенное решение по методу характеристик (6) является решением данной задачи в смысле Кружкова.

Литература

1. Олейник О. А. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями. // Тр. Московского математического общества. Т.5. 1956.
2. Филиппов А. В., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, матем. сб., 1960., том 51(93) номер 1, 99-128