Экстремальные задачи для собственных значений эллиптических операторов второго порядка

Гончаров Василий Юрьевич

Ассистент

Кафедра ПМИТЭТ МАИ (НИУ), Москва, Россия

E-mail: fulu.happy@gmail.com

Решение ряда прикладных задач приводит к рассмотрению задач оптимального управления коэффициентами эллиптических операторов, в которых в качестве функционалов цели выступают собственные значения этих операторов. Одной из таких задач является задача проектирования тонкого прямого крыла, наименее подверженного крутильной дивергенции, которая состоит в нахождении распределения толщин обшивки крыла (удовлетворяющего ряду ограничений), максимизирующего критическую скорость крутильной дивергенции, при которой происходит разрушение крыла. При рассмотрении таких задач естественно считать, что допустимые управления принадлежат пространству измеримых существенно ограниченных функций. Хотя такое допущение часто позволяет установить существование оптимального решения, оно приводит к проблеме, которая заключается в том, что такое решение может не иметь физического смысла! Так, например, в упомянутой задаче о проектировании тонкого прямого крыла оптимальное распределение толщин обшивки должно удовлетворять некоторым «минимальным» требованиям гладкости. Разумеется, эти требования могут определяться самим исследователем и выражаться в том, что допустимые управления принадлежат достаточно «узкому» пространству функций, обладающих желаемой гладкостью. Однако данный подход требует от исследователя введения ряда искусственных параметров, характеризующих гладкость управлений, которые в сущности игнорируют природу экстремальной задачи и ее решений. Одним из естественных путей преодоления описанной проблемы является непосредственное доказательство регулярности оптимальных решений, получение которого и является одной из задач данной работы.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^d$ с границей класса $C^{1,1}$, $0 < \check{c} < \frac{\tilde{c}}{|\Omega|} < \hat{c} < +\infty$, $I = [\check{c}, \hat{c}]$. Введем множество

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in L_\infty(\Omega) : \ \check{c} \le u(x) \le \hat{c}, \ \int_\Omega u(x)\, dx = \tilde{c} \right\}.$$

Определим множество $\mathcal{E}$ всех функций $f \in C^{0,1}(\bar{\Omega} \times I)$ таких, что $f'_\xi \in C^{0,1}(\bar{\Omega} \times I)$, и существует постоянная $E[f] > 0$ такая, что для всех $x \in \Omega$, $\xi_1, \xi_2 \in I$ выполняется неравенство

$$f(x,\xi_2) - f(x,\xi_1) \geq (\xi_2 - \xi_1) f'_\xi(x,\xi_1) + E[f] \cdot |\xi_2 - \xi_1|^2.$$

Пусть

$$a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega}), \qquad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad x \in \Omega,$$
$$-a, b \in \mathcal{E}, \qquad a(x,\xi) \geq 0, \quad b(x,\xi) \geq b_0 > 0, \quad (x,\xi) \in \Omega \times I.$$

Для $u \in \mathcal{U}$ рассмотрим равномерно эллиптический оператор

$$L_u \triangleq \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - a(x, u(x))$$

и следующую задачу на собственные значения:

$$L_u y(x) + \lambda M_u y(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad y \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad M_u \triangleq b(x, u(x)).$$

Пусть $\lambda_k[u]$ — k-ое собственное значение этой задачи. Поставим следующую экстремальную задачу: найти элемент $\hat{u}_k \in \mathcal{U}$ такой, что

$$\lambda_k[\hat{u}_k] = \sup_{u \in \mathcal{U}} \lambda_k[u]. \tag{1}$$

Центральное место в работе занимает

Теорема 1. *Пусть для любого $x \in \Omega$ функции $-a(x,\cdot)$, $b(x,\cdot)$ являются неубывающими (невозрастающими) на отрезке I, причем*

$$[a'_\xi(x,\xi)]^2 + [b'_\xi(x,\xi)]^2 > 0, \qquad (x,\xi) \in \Omega \times I.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ задача (1) является разрешимой, и всякое ее решение суть элемент пространства $C^{0,1}(\bar{\Omega})$.

Отметим, что доказательство Теоремы 1 для высших собственных значений привлекает методы негладкого анализа. В докладе также планируется обсудить вариации Теоремы 1, способ построения максимизирующих последовательностей, а также случай управления старшими коэффициентами оператора.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00425 а.