# Новое равновесие в игре трех лиц

***Болдырев Михаил Владиславович***

*Студент*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail:* m_boldyrev@list.ru

Задается игра трех лиц в нормальной форме при неопределенности. При рассмотрении ограничимся интервальными неопределенностями, о которых известны только границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют по тем или иным причинам.

$$\Gamma_3 = \langle \mathbb{N} = \{1, 2, 3\}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle .$$

Далее будет рассмотрена следующая игра гарантий: $\Gamma_3^g = \langle \{1, 2, 3\}, \{X_i\}_{i=1,2,3}, \{f_i[x]\}_{i=1,2,3} \rangle$ при переходе $f_i[x] = \min_{y\in Y} f_i(x, y)$.

В ней каждый игрок $i$ выбирает и использует свою *стратегию* $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, в результате образуются *ситуации* $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \prod_{i=1}^{3} X_i \subset \mathbb{R}^n (n = \sum_{i=1}^{3} n_i)$. На множестве $X$ определена *функция выигрыша* $f_i[x]$ каждого $i$-го игрока, значение которой называется *гарантированным выигрышем* игрока. В $\Gamma_3^g$ возможны пять коалиционных структур $\mathfrak{P}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \mathfrak{P}_2 = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{P}_3 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\mathfrak{P}_4 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\mathfrak{P}_5 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$.

Предполагаем, что в $\Gamma_3^g$ отсутствуют побочные платежи, может реализоваться любая коалиционная структура, игроки могут обсуждать перед игрой свои стратегии, договариваться о совместных действиях, заключать союзы (коалиции, альянсы) для объединения ресурсов, стремясь к возможно большим своим выигрышам.

Обозначим $-i = \{\{1, 2, 3\} \setminus \{i\}\}$ $(i = 1, 2, 3)$. Используем условие *индивидуальной рациональности* ситуации $x^*$.

$$f_i^0 = \max_i \min_{-i} f_i[x] = \min_{-i} f_i[x_i^0, x_{-i}] \leq f_i[x^*] \quad (i = 1, 2, 3),$$

и *коллективной рациональности*: $x^*$ – должна реализовать векторный максимум (по Слейтеру, Парето, Джоффриону или любой другой в трехкритериальной задаче $\Gamma_v = \langle X, \{f_i[x]\}_{i=1,2,3} \rangle$). Для каждой из коалиционных структур $\mathfrak{P}_l$ $(l = 2, 3, 4)$ формулируется условие *коалиционной рациональности* ситуации $x^*$:

$$f_1[x_1, x_2, x_3^*] \le f_1[x^*] \ \forall x_1, x_2$$
$$f_2[x_1, x_2, x_3^*] \le f_2[x^*] \ \forall x_1, x_2$$
$$f_1[x_1, x_2^*, x_3] \le f_1[x^*] \ \forall x_1, x_3$$
$$f_3[x_1, x_2^*, x_3] \le f_3[x^*] \ \forall x_1, x_3$$
$$f_2[x_1^*, x_2, x_3] \le f_2[x^*] \ \forall x_2, x_3$$
$$f_3[x_1^*, x_2, x_3] \le f_3[x^*] \ \forall x_2, x_3$$

Объединение идей концепций равновесий по Нэшу и по Бержу приводит к следующему понятию: ситуацию $x^*$, удовлетворяющей в игре $\Gamma_3^g$ условиям индивидуальной, коллективной и коалиционной рациональностей назовем *коалиционно равновесной* (КР) в игре $\Gamma_3^g$.

В статье с помощью гермейеровской свертки функций выигрыша для игры $\Gamma_3^g$ установлено следующее:

а) определены достаточные условия существования КР, сводящиеся к построению минимаксной стратегии в антагонистической игре, эффективно конструируемой с помощью функции выигрыша $f_i[x]$;

б) доказано существование КР в смешанных стратегиях (при непрерывных на $X$ функциях выигрыша и компактности множества стратегий $X_i$ $(i = 1, 2, 3)$).

**Литература**

1. Zhukovskiy V. I. and Salukvadze M. E. The Vector-Valued Maximin. New York. etc: Academic Press, 1994.
2. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположным интересами. М.: Наука, 1976.
3. Жуковский В. И. Кооперативные игры при неопределенности. М.: URSS, 2010.