О неподвижных точках многозначного отображения пространства с семейством псевдометрик.

Ястребов Кирилл Сергеевич

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: yastrebovks@gmail.com

Определение 1. Для множества X отображение $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется *псевдометрикой* на X, если для любых точек $x, y, z \in X$ она удовлетворяет следующим условиям:
1)$d(x, y) \geq 0, (x = y) => (d(x, y) = 0)$;
2)$d(x, y) = d(y, x)$;
3)$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

В пространству X с псевдометрикой d понятие фундаментальности и сходимости последовательности определяются стандартным образом, по аналогии с обычным метрическим пространством.

Определение 2. Пусть на множестве X задано семейство псевдометрик $\{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Будем говорить, что псевдометрическое пространство $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ является *хаусдорфовым*, если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} d_\lambda(x, y) > 0$.

Определение 3. Будем говорить, что псевдометрическое пространство $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ является *полным*, если оно полно по каждой псевдометрике d_λ.

Определение 4. Пусть A, B - два непустых замкнутых и ограниченных подмножества метрического пространства (X, ρ). *Метрикой Хаусдорфа* называется функция d_H:

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \rho(a, b), \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \rho(a, b)\}$$

Определение 5. Пусть $C(X)$ - совокупность непустых замкнутых и ограниченных подмножеств в X, где $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ - заданное псевдометрическое пространство. Для любых $A, B \in C(X)$ и для любого $\lambda \in \Lambda$ определим функцию $H_\lambda(A, B) := \max\{\sup\limits_{a\in A} \inf\limits_{b\in B} d_\lambda(a, b), \sup\limits_{b\in B} \inf\limits_{a\in A} d_\lambda(a, b)\}$.

Предложение 1. *Функция* $d : X \times X \to [0, \infty)$, *где* $d(x, y) := \sup\limits_{\lambda\in\Lambda} d_\lambda(x, y)$, *является метрикой, и если псевдометрическое пространство* $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ *полно, то и метрическое пространство*

(X,d) *тоже полно.*

Основной результат доклада – следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть X - полное хаусдорфово псевдометрическое пространство с семейством псевдометрик $\{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Пусть $T: X \to C(X)$ - многозначное отображение такое, что для любых $x, y \in X$ и любого $\lambda \in \Lambda$ выполнено следующее неравенство:*

$$H_\lambda(T(x), T(y)) \leq \delta_\lambda d_\lambda(x,y) + L_\lambda d_\lambda(y, T(x)), \tag{1}$$

где $\{\delta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ - 2 семейства неотрицательных вещественных чисел, причем $\delta = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \delta_\lambda < 1, L = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda < \infty$. Тогда существует такая точка $\xi \in X$, что $\xi \in T(\xi)$, т.е. $\xi \in Fix(T)$.

Доказательство основано на утверждении предложения 1, а так же на том, что можно показать, что величина $H(A,B) := \sup\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda(A,B)$ определяет на множестве $C(X)$ метрику Хаусдорфа. Переходя в неравенстве (1) к супремуму по λ, получим неравенство

$$H(T(x), T(y)) \leq \delta d(x,y) + L d(y, T(x)) \qquad (2).$$

Далее, можно показать, что существует T-итерационная последовательность, являющаяся фундаментальной и сходящейся к некоторой точке ξ, которая является неподвижной для многозначного отображения T.

Замечания.

1. Неподвижная точка, существование которой утверждается в Теореме 1, не является, вообще говоря, единственной.
2. Отображение T, участвующее в Теореме 1, не обязано быть непрерывным, в отличие от сжимающих отображений.
3. Теорема 1 является обобщением теоремы о неподвижной точке для многозначных отображений типа Замфиреску (Zamfirescu) (соответствующее определение см. в [2]), которая представлена в [1].

Литература

1. Kritsana Neammanee, Annop Kaewkhao, *Fixed Point Theorems of Multi-Valued Zamfirescu Mapping.* Journal of Mathematics Research Vol. 2, No. 2, 2010, 150-156.
2. Zamfirescu,T. *Fixed point theorems in metric spaces.* Arch. Math.(Basel), 23, 1972, 292-298.