Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

О единичных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов

Научный руководитель – Редькин Николай Петрович

Попков Кирилл Андреевич

Кандидат наук

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дискретной математики, Москва, Россия

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [1, 2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального проверяющего теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [4], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

В качестве неисправностей функциональных элементов будем рассматривать однотипные константные неисправности типа p на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно заданной булевой константе p.

Пусть B — произвольный функционально полный базис, значение $p \in \{0, 1\}$ зафиксировано и T — единичный проверяющий тест для некоторой схемы S в базисе B. Введём следующие обозначения: $D_p^B(T)$ — длина теста T; $D_p^B(S) = \min D_p^B(T)$, где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам T для схемы S; $D_p^B(f) = \min D_p^B(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D_p^B(n) = \max D_p^B(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D_p^B(f)$. Функция $D_p^B(n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста.

Из результатов работ [5, 6, 7] следуют равенства соответственно $D_1^{B_1}(n) = 1$, $\mathrm{D}_0^{B_1}(n) = 1$ и $D_1^{B_2}(n) = D_0^{B_2}(n) = 2$ (при $n \geqslant 2$), где $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$, $B_2 = \{\&, \vee, \neg\}$.

Пусть B_3 — произвольное функционально полное подмножество множества $\{\overline{x_1}, x_1\& \&\ldots\&x_m \mid m \geqslant 2\}$, например, множество $\{\overline{x_1}, x_1\&x_2\}$. Выделим три возможных представления функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \tag{1}$$

$$f(\tilde{x}^n) = 0,\ \overline{x_i} \text{ или } x_{i_1}^{\sigma_1}\&x_{i_2}\ldots\&x_{i_k}, \tag{2}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \overline{x_{i_1}}\&\overline{x_{i_2}}\&x_{i_3}\&\ldots\&x_{i_k} \text{ или } \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1}\&x_{i_2})^{\sigma_2}\&x_{i_3})^{\sigma_3}\&\ldots\&x_{i_k})^{\sigma_k}, \quad (3)$$

где $2 \leqslant k \leqslant n$; $i, i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, индексы $i_1, \ldots, i_k$ попарно различны и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \in \{0, 1\}$, причём в представлении (3) хотя бы одно из чисел $\sigma_2, \ldots, \sigma_k$ равно 0 и если $k = 2$, то полагаем $x_{i_3}\&\ldots\&x_{i_k} \equiv 1$.

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от тождественной единицы, справедливо равенство*

$$D_1^{B_3}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (1), \\ 1, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (2), \\ 2, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (3), \\ 3, & \text{если функция } f \text{ не представима в видах } (1)\text{–}(3). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D_1^{B_3}(f)$ не определено.

Следствие 1. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D_1^{B_3}(n) = 3$.*

Выделим ещё два возможных представления функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1}^{\sigma_1}\&\ldots\&x_{i_k}^{\sigma_k}, \quad (4)$$

$$f(\tilde{x}^n) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1}\&x_{i_2}^{\sigma_2})^{\delta_1}\&x_{i_3}^{\sigma_3})^{\delta_2}\&\ldots\&x_{i_k}^{\sigma_k})^{\delta_{k-1}}, \quad (5)$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$ в представлении (4) и $2 \leqslant k \leqslant n$ в представлении (5); $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \delta_1, \ldots, \delta_{k-1} \in \{0, 1\}$, причём хотя бы одно из чисел $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$ (в представлении (5)) равно 0.

Теорема 2. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, отличной от констант, справедливо равенство*

$$D_0^{B_3}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (1), \\ 1, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (4), \text{ но не в виде } (1), \\ 2, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (5), \\ 3, & \text{если функция } f \text{ не представима в видах } (1), (4), (5). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D_0^{B_3}(f)$ не определено.

Следствие 2. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D_0^{B_3}(n) = 3$.*

Источники и литература

1) Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. 1958. Т. 51. С. 270–360.
2) Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). М.: МГУ. 1986. С. 7–12.
3) Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
4) Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.

5) Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2008. №5. С. 49–52.

6) Бородина Ю. В., Бородин П. А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 127–133.

7) Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2008. №1. С. 40–44.