Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Решение параболической задачи оптимального управления с использованием чебышевского набора шагов по времени

Научный руководитель – Лапин Александр Васильевич

Романенко Артур Данилевич

Аспирант

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, Россия

E-mail: romart92@mail.ru

В рассматриваемой области $Q_T = \Omega \times (0,T]$ и границей $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T]$, где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ищется решение задачи состояния

$$\begin{gathered} \mathcal{L}y \equiv y_t - \Delta y = u \quad \text{в } Q_T, \\ y(x,t) = 0 \quad \text{для } x \in \Gamma_T, \\ y(x,0) = y_0(x) \quad \text{для } x \in \Omega. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $y \in L_2(Q_T),\ u \in L_2(Q_T)$ – искомые функции состояния и управления соответственно.

Целевой функционал с заданной функцией наблюдения z_d имеет вид

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} (y(x,t) - z_d(x,t))^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} u^2\, dxdt.$$

Поточечные ограничения на управление

$$U_{ad} = \{u \in L_2(Q_T):\ |u(x,t)| \leqslant \overline{u} \quad \text{для п.вс.} \quad (x,t) \in Q_T\}.$$

Тогда задача оптимального управления заключается в поиске

$$\begin{gathered} \min_{(y,u)\in K} J(y,u), \\ K = \{(y,u) : u \in U_{ad},\ \text{где } y,\ u \text{ удовлетворяют } (1)\}. \end{gathered}$$

В работе [1] доказано существование единственного решения данной задачи.

Для аппроксимации уравнения (1) вводятся равномерная по пространству сетка с постоянным шагом h и сетка по времени с переменным набором шагов $\{\tau_k\}_{k=1}^{N_t}$. Используется явная схема, причем последовательность шагов по времени удовлетворяет условию устойчивости благодаря их упорядочиванию [2, 3].

Численное решение находится итерационным методом Удзавы [4] с предобусловливателем LL^T, где матрица $L = diag\{-E - \tau_k\Delta_h,\ E,\ 0\}$. Здесь под E понимается единичная матрица, Δ_h – сеточный аналог оператора Лапласа. Структура L и L^T позволяет воспользоваться явными формулами при их обращении. Устойчивость гарантирована упорядоченным набором шагов по времени.

Источники и литература

1) Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

2) Лебедев В.И., Финогенов С.А. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевских циклических итерационных методах // ЖВМиМФ, Т.11. 1971. No. 2. С. 425-438.

3) Лебедев В.И., Медовиков А.А. Явный метод второго порядка точности для решения систем жестких дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. 1971. No. 9. C. 55-63.

4) Lapin A.V. Preconditioned Uzawa type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems // Lobachevskii J. Math. V.31. 2010. No.4. P. 309-322.