Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений B_n и D_n.

Научный руководитель – Тимашев Дмитрий Андреевич

Горницкий Андрей Александрович
Выпускник (магистр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: gnomage@mail.ru

Рассматриваются представления простых алгебр Ли и вопрос построения "канонического" весового базиса в произвольном неприводимом модуле старшего веса. Э.Б. Винберг предложил метод построения таких базисов путем применения к старшему вектору понижающих операторов, отвечающих всем отрицательным корням, и выдвинул ряд гипотез об их параметризации и структуре. Из работ Фейгина–Фурье–Литтельмана можно вывести истинность этих гипотез для случаев A_n, C_n. Кроме того, гипотезы верны для случаев G_2, B_3, D_4. Мы рассмотрим случаи D_n и B_n. Пусть G — односвязная полупростая комплексная алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ — ее касательная алгебра Ли. Имеется треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}^+$, где $\mathfrak{u}^-$ и $\mathfrak{u}^+$ — касательные алгебры отрицательной и положительной максимальных унипотентных подгрупп, а $\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра, то есть касательная алгебра максимального тора T в G. Имеем: $\mathfrak{u}^+ = \langle e_\alpha \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle$, $\mathfrak{u}^- = \langle e_{-\alpha} \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle$, где Δ_+ — система положительных корней, а $e_{\pm\alpha}$— корневые векторы.

Обозначим неприводимый G-модуль со старшим весом λ через $V(\lambda)$, пусть v_λ — старший вектор этого модуля.

Определение 1. Сигнатурой назовем набор $\sigma = (\lambda, p_1, \dots, p_N)$, где N — число положительных корней, пронумерованных в определенном порядке: $\Delta_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, λ — доминантный вес, $p_i \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначим
$$v(\sigma) = e_{-\alpha_1}^{p_1} \cdot \ldots \cdot e_{-\alpha_N}^{p_N} \cdot v_\lambda.$$

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — фундаментальные веса. Будем сравнивать сигнатуры одного доминантного веса с помощью какого-либо мономиального порядка на Z^N, сравнивая наборы $(p_1, \dots, p_N)$.

Определение 2. Сигнатура σ существенна, если $v(\sigma) \notin \langle v(\tau) \mid \tau < \sigma \rangle$.

Предложение 1. *Множество векторов $\{v(\sigma) \mid \sigma$ существенна$\}$ образует базис пространства $V(\lambda)$.*

Предложение 2. *Существенные сигнатуры образуют полугруппу.*

Пусть Σ_{B_n} и Σ_{D_n} — полугруппы существенных сигнатур для B_n и D_n.

Теорема 1. *Существуют нумерация положительных корней и порядок на сигнатурах для B_n и D_n такие, что:*

1) Σ_{D_n} порождается существенными сигнатурами старших весов

$$\omega_1, \ldots, \omega_n, 2\omega_{n-1}, 2\omega_n, \omega_{n-1} + \omega_n;$$

2) Σ_{B_n} *порождается существенными сигнатурами старших весов*

$$\omega_1, \ldots, \omega_n, 2\omega_n.$$

Обозначим $\Sigma = \Sigma_{D_n}$ или $\Sigma = \Sigma_{B_n}$. Пусть $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ — решетка весов, $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ — конус, натянутый на Σ (линейные комбинации с положительными рациональными коэффициентами).

Теорема 2. *Полугруппа* Σ *насыщена, то есть* $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{Q}} \bigcap (\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^N)$.

Источники и литература

1) T. Backhaus, D. Kus, *The PBW filtration and convex polytopes in type B*, arXiv: 1504.06522v2.
2) E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n*, Transformation Groups 165 (2011), no. 1, 71-89.
3) E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras*, Int. Math. Res. Not. 2011, no. 24, 5760-5784.
4) A.A. Gornitskii, *Essential signatures and canonical bases of irreducible representations of the group G_2*, Mathematical Notes, **97** (2015), 30-41.
5) A.A. Gornitskii, *Essential signatures and canonical bases of irreducible representations of D_4*, preprint, 2015, arXiv:1507.07498.
6) P. Littelmann, *Cones, crystals, and patterns*, Transformation Groups, **3**, no. 2, (1998), 145-179.
7) P. Littelmann, X. Fang, G. Fourier, *Essential bases and toric degenerations arising from generating sequences*, arXiv:1510.02295v2.
8) E. B. Vinberg, *On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebras*, Conference Talk, Bielefeld, 2005.