Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Построение базисов Гребнера для параметрических семейств специального вида

Научный руководитель – Гайфуллин Сергей Александрович

Тихонова Мария Ивановна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: m_tikhonova94@mail.ru

Базис Гребнера - важный и широко используемый инструмент компьютерной алгебры. В классическом случае мы рассматриваем $k[x_1, \ldots, x_n]$ - кольцо многочленов от n переменных над полем k. В данном кольце у всякого идеала I существует конечный базис Гребнера G. Но если рассмотреть обобщение базиса Гребнера для идеалов в кольце многочленов от бесконечного числа переменных $R = k[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$, то ситуация меняется. Данное кольцо уже не является нетеровым, поэтому в общем случае базис Гребнера идеала I оказывается бесконечным. Однако если образующие идеала заданы некоторым параметрическим способом, иногда при выполнении дополнительных ограничений удается построить конечный аналог базиса Гребнера (или красиво запараметризовать бесконечный базис). Возьмем такой пример:

$I =< g_k = x_0\, x_k + x_1\, x_{k-1} | k \in \mathbb{N} >$

Тогда при лексикографическом упорядочении $x_0 < x_1 < \ldots$, базис Гребнера идеала I можно запараметризовать следующим образом:

$G = \{g_k = x_0\, x_k + x_1\, x_{k-1},\ f_{l,k} = x_1\, x_l x_{k-1} - x_1\, x_{l-1} x_k,\ l > k,\ k, l \in \mathbb{N}\}$

Более интересным примером является идеал, порожденный двумя параметрическими биномами:

$I =< f^1_k = M_0\, x_k + M_1\, x_{k-1}\ \ f^2_l = M_2\, x_l + M_3\, x_{l-1},\ l, k \geq k_0,\ k, l \in \mathbb{N} >$

где $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ - взаимно простые мономы, в которые входят лишь переменные с фиксированными индексами. Предположим также, что ограничение на бегущие индексы k_0 превосходит все фиксированные индексы из M_i. Тогда данный идеал обладает конечной параметризацией Базиса Гребнера.

В [1] показано, что при фиксированном мономиальном упорядочение, устойчивого относительно произвольного сдвига номеров переменных, с $x_i < x_{i+1}$, если конечная система параметрических многочленов $F = (f_1, \ldots, f_m) \subset R$ такова, что:

1) каждый многочлен $f \in F$ зависит не более чем от одного параметра k, причем степень f по параметрическим переменным не превосходит 1.

2) каждый многочлен $f \in F$ однороден по степени и по весу.

Тогда параметрический идеал I, порожденный F, обладает конечной параметризацией базиса Гребнера. Данный базис может быть построен с помощью аналога алгоритма Бухбергера и алгоритму, строящему эквивариантный базис Гребнера [2,3].