Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Классификация линейных порядков, интерпретируемых многомерно в арифметике Пресбургера

Научный руководитель – Беклемишев Лев Дмитриевич

Запрягаев Александр Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: rudetection@gmail.com

Арифметика Пресбургера, введённая впервые в 1929 г. [4], – это полная теория натурального ряда с операцией сложения без умножения. Подобное сокращение языка обеспечивает, в отличие от арифметики Пеано, полноту и разрешимость соответствующей теории.

Гипотеза А. Виссера и Й. Зутхаута [5] об определимом изоморфизме тождественной всех одномерных интерпретаций [1] арифметики Пресбургера без параметров в себя была положительно разрешена докладчиком в 2016 г. В настоящей работе мы рассматриваем вопрос о возможности её обобщения на случай многомерных интерпретаций. При решении этой проблемы естественно возникает задача об описании линейных порядков, интерпретируемых в арифметике Пресбургера в разном числе измерений.

В предложенной работе строится полная классификация таких порядков на основе модификации понятия ранга Кантора-Бендиксона для линейных порядков (так называемого VD^*–ранга, в соответствии с [2]). Для этого с помощью геометрического подхода показывается возможность сопоставления всякому определимому в арифметике Пресбургера множеству его *арифметической размерности* $n \in \mathbb{N}$. Арифметическая размерность указывает на существование определимого изоморфизма с некоторой декартовой степенью $\mathbb{N}^n$ натурального ряда. Это позволяет сформулировать аналог ключевой леммы, использованной в доказательстве гипотезы Виссера-Зутхаута. Также будут изложены наиболее существенные отличия, возникающие при анализе гипотезы в многомерной ситуации.

Источники и литература

1) Hodges, F. Model Theory // Cambridge University Press, 1999.
2) Khoussainov, B., Rubin, S., & Stephan, F. Automatic linear orders and trees. // ACM Transactions on Computational Logic (TOCL), 6(4), 2005, P. 675-700.
3) Muchnik An. A. The Definable Criterion for Definability in Presburger Arithmetic and its Applications // Theoretical Computer Science, Volume 290, Issue 3, 3 January 2003, P. 1433-1444.
4) Presburger, M. Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves. Warszawa: 1929, P. 92–101.
5) Zoethout, Jetze. Interpretations in Presburger Arithmetic / Bachelor Thesis under the supervision of Albert Visser // Department of Philosophy, Utrecht University, 2015.