Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Оценка параметра больших уклонений для системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком

Научный руководитель – Баштова Елена Евгеньевна

Крылова Галина Александовна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: galinak108@mail.ru

Рассматривается одноканальная система массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком и независимыми одинаково распределенными временами обслуживания. Для описания входящего потока потребуются следующие обозначения.
Пусть $X(t)$ - регенерирующий входящий поток.
Обозначим $\theta_0 = 0; \{\theta_i\}_{i=0}^{\infty}$ - последовательность моментов регенерации;
$\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i = 0, 1, ...$ - период регенерации.
Пусть $\xi_i = X(\theta_i) - X(\theta_{i-1})$, $i = 0, 1, ...$ - число пришедших требований в течение i-го периода регенерации. Предполагаем, что $\mu = \mathbf{E}\tau_1 < \infty$, $a = \mathbf{E}\xi_1 < \infty$.
$\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X(t)}{t}$ - интенсивность входящего потока, и $\lambda = \dfrac{a}{\mu}$.
Времена обслуживания $\{\eta_i\}_{i\geq 1}$ - н. о. р. с. в. с ф. р. $B(x)$ и средним $b < \infty$.
Введем следующие функции:

$$f(s) = \mathbf{E}b(-s)^{\xi_1} e^{-s\tau_1},\ b(s) = \mathbf{E}s^{-s\eta_1},\ Re\, s \geq 0.$$

Пусть $W(t)$ - процесс виртуального времени ожидания и $W_n = W(\theta_n - 0)$. Если $\rho = \lambda b < 1$, то существует предельное распределение процесса W_n. Обозначим $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(W_n \leq x)$.
В работе [1] доказана теорема о больших уклонениях:

Теорема 1.
Пусть выполнены следующие условия:
1) наибольший общий делитель чисел $\{i = 1, 2, ...\}$, т.ч $\mathbf{P}(\xi_1 = i) > 0$, равен единице.
2) $\delta_0 = \sup\{s : f(s) < \infty\} > 0$ и $f(\delta_0) > 1$.
Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x^{-1} ln(1 - F(x)) = -q\,.$$

где q - единственный положительный корень уравнения $f(s) = 1$.
В данной работе построена статистическая оценка для параметра q и доказана ее состоятельность.
Предполагаются следующие условия: наблюдаем n циклов регенерирующего входящего потока $X(t)$, т.е. $(\tau_i, \xi_i)_{i=1}^{n}$, и известна функция распределения времен обслуживания $B(x)$.
Пусть $\beta = \sup\{s : b(-s) < \infty\}$, $0 < \beta < \infty$, $b(-\beta) = \infty$.
Определим функцию $f_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(b(-s)^{\xi_i} e^{-s\tau_i})$, которая является несмещенной и состоятельной оценкой для функции $f(s)$.
Для любого целого $k > 0$ определим $j_{n,k} = \min\{i : f_n(i\frac{\beta}{k}) > 1\}$. Т.о. $j_{n,k}$ является оценкой для параметра q.

Теорема 2.

В условиях Теоремы 1 для любого ε и для любого $k > k_0$, т.ч. $\dfrac{\beta}{k} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\mathbf{P}(|j_{n,k}\frac{\beta}{k} - q| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ по вероятности, при } n \longrightarrow \infty.$$

Источники и литература

1) L.G.Afanasyeva, E. Bashtova, A. Tkachenko. Large deviations and statistical analysis for queueing system with regenerative input flow, 2015.

2) N.G.Duffeld, J.T. Lewis, Neil O'Connell. Entropy of ATM traffic streams, 1994.