Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О максимальном максимуме модуля мартингала

Научный руководитель – Гущин Александр Александрович

Клиндухов Дмитрий Владимирович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: dmi31992@gmail.com

В докладе рассматривается следующая задача. Пусть задана случайная величина ξ с $\mathsf{E}\xi = 0$. Пусть $(M_t)_{t\leq 1}$ — мартингал, заданный на некотором вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq 1}, \mathsf{P})$, такой, что распределения M_1 и ξ совпадают. Требуется найти максимальное в смысле стохастического порядка распределение максимума модуля мартингала $(M_t)_{t\leq 1}$. Для решения задачи в докладе приводится конструкция, аналогичная конструкции Дубинса-Гилата.

Для формулировки результата введем дополнительные определения.

Введем вспомогательный мартингал $(N_t)_{t\leq 1}$, заданный на вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\leq 1}, \mathsf{P}')$, где $\Omega' = [0;1]$, $\mathcal{F}'$ — Борелевская сигма-алгебра, а P' — мера Лебега. Фильтрацию $(\mathcal{F}'_t)_{t\leq 1}$ определим следующим образом. Пусть $\mathcal{F}'_t = \{\Omega', \emptyset\}$ для $t \in [0; 1/2)$, для $t \in [1/2; 1]$ $\mathcal{F}'_t$ — наименьшая сигма-алгебра, содержащая в себе два атома — интервалы $(t; 1]$ и $[0; 1-t)$, а также все борелевские множества из отрезка $[1-t; t]$. Для заданной случайной величины ξ определим ее квантильную функцию $Q_\xi(u)$:

$$Q_\xi(u) = \inf\{x : F_\xi(x) > u\},$$

где $F_\xi(x)$ — функция распределения ξ. Тогда, если $u \in \Omega'$, то

$$\xi \stackrel{\mathrm{d}}{=} Q_\xi(u).$$

Положим $N_1(u) = Q_\xi(u)$, $u \in \Omega'$. Пусть

$$M^* = \sup_{t\in[0;1]} |M_t|,$$

$$N^* = \sup_{t\in[0;1]} |N_t|.$$

Теорема. *Для любого мартингала $(M_t)_{t\leq 1}$, заданного на некотором вероятностном пространстве с фильтрацией, такого, что распределение M_1 совпадает с распределением заданной случайной величины ξ, $\mathsf{E}\xi = 0$, выполнено:*

$$\lambda \mathsf{P}(M^* > \lambda) \leqslant \lambda \mathsf{P}'(N^* > \lambda) = \mathsf{E}' N_1 \mathbf{1}_{\{N^*>\lambda\}} \mathbf{1}_{[1/2;1]} - \mathsf{E}' N_1 \mathbf{1}_{\{N^*>\lambda\}} \mathbf{1}_{[0;1/2)}.$$

Источники и литература

1) Dubins L. E., Gilat D. On the distribution of maxima of martingales. — Proc. Amer. Math. Soc., 1978, v. 68, № 3, p. 337–338.