Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О задаче оптимальной фильтрации одномерных диффузионных процессов

Научный руководитель – Насыров Фарит Сагитович

Кагирова Гузель Раифовна
Студент (магистр)
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия
E-mail: g.u.z.e.l.k.a.kagirova@gmail.com

Пусть дан диффузионный процесс $(x(t),\, y(t))$:

$$dx = b^1(t, x(t), y(t))\, dt + \sigma^1(t, x(t), y(t))\, dW_1(t) + \sigma^2(t, x(t), y(t))\, dW_2(t), \tag{1}$$
$$dy = b^2(t, x(t), y(t))\, dt + \sigma^0(t, y(t))\, dW_2(t). \tag{2}$$

Задача фильтрации диффузионных процессов заключается в том, чтобы построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку некоторой функции от ненаблюдаемого процесса $f(x(t))$ по результатам наблюдений $y(s), s \leq t$. Такой оценкой (см. [1],[4]) является условное математическое ожидание m_t:
$m_t = E[\, f(x(t))\, |\mathbf{Y}_t\,] = \int_R f(x)\, \pi(t,x)\, dx$,
где $\mathbf{Y}_t = \sigma\{y(s), s \leq t\}$ – σ-алгебра, порожденная значениями наблюдаемого процесса $y(s)$ при $s \in [0,t]$, $\pi(t,x)$ – нормализованная фильтрационная плотность, определяемая по формуле
$\pi(t,x) = \frac{V(t,x)}{\int_R V(t,x)\, dx}$,
а $V(t,x)$ – ненормализованная фильтрационная плотность, удовлетворяющая линейному стохастическому дифференциальному уравнению Ито в частных производных.

Показано, что при умеренных предположениях на коэффициенты уравнений (1)–(2) задача фильтрации (1)–(2) сводится к более простой задаче:

$$dX(t) = dW_1(t) + (C^x(t))'_t\, dt, \tag{3}$$
$$dY(t) = d\tilde{W}(t) + (C^y(t))'_t\, dt, \tag{4}$$

где коэффициенты $C^x(t), C^y(t)$ определяются по формулам:
$(C^x)'_t(t) = \frac{B^1(t,x^*(t,y(t),X(t)),y(t)) - (x^*)'_t(t,y(t),X(t))}{(x^*)'_{W_1}(t,y(t),X(t))}$,
$(C^y)'_t(t) = \frac{(\sigma^0)'_y(t,y^*(t,Y(t)))\cdot\sigma^0(t,y^*(t,Y(t))) - 2\frac{\partial}{\partial t}y^*(t,\tilde{v})|_{\tilde{v}=Y(t)}}{2\sigma^0(t,y^*(t,Y(t)))}$.
Ненормализованная фильтрационная плотность задачи (3)–(4) находится как решение “обычного” простейшего одномерного линейного параболического уравнения с постоянным коэффициентом диффузии, остальные коэффициенты зависят от наблюдаемого процесса $y(t)$. При этом нормализованные фильтрационные плотности для задач (1)–(2), (3)–(4) связаны достаточно простой формулой:

$$\pi(t,v) = \frac{\pi^*(t, x^{*-1}(t, y(t), v))}{\sigma^1(t, v, y(t))}.$$

Источники и литература

1) Асадуллин Э. М., Насыров Ф.С. О задаче фильтрации диффузионных процессов. — Уфимский математический журнал, выпуск №2, том 3, 2011.
2) Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974. 696 с.

3) Насыров Ф. С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. — М.: Физматлит, 2011. 212 с.
4) Розовский Б. Л. Эволюционные стохастические системы. — М.: Наука, 1983. 208 с.