Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вероятности высоких выбросов для гауссовских нестационарных процессов в дискретном и непрерывном времени.

Научный руководитель – Питербарг Владимир Ильич

Козик Игорь Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математической статистики и случайных процессов, Москва, Россия
E-mail: igor.kozik@mail.ru

В докладе изучается соотношение асимптотик вероятностей высоких выбросов гауссовского нестационарного процесса с единственной точкой максимума дисперсии в дискретном и непрерывном времени. Оказалось, что эти асимптотики зависят как от локальных свойств процесса в окрестности точки максимума дисперсии, так и от степени сгущения решетки при росте высоты выбросов.

Пусть $\alpha \in (0,2)$. Мы рассмотрим три типа сетки на $\mathbb{R}$:
1) $\mathcal{R}_d(\gamma) = \{ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma < \alpha$ – плотная сетка (dense grid);
2) $\mathcal{R}_p(b,\gamma) = \{kbu^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $b > 0$, $\gamma = \alpha$ – сетка Пикандса (Pickands' grid);
3) $\mathcal{R}_s(\gamma) = \{ku^{-2/\gamma}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\gamma > \alpha$ – разреженная сетка (sparse grid).

Рассмотрим гауссовский нестационарный процесс, дисперсия которого достигает максимума в единственной точке. Итак, пусть теперь $X(t)$, $t \in [0,T]$, с нулевым средним, дисперсией $\sigma^2(t) = EX^2(t)$ и корреляционной функцией $r(s,t) = EX(s)X(t)/\sigma(s)\sigma(t)$. Мы предположим, что дисперсия достигает своего единственного максимума во внутренней точке $t_0 \in [0,T]$.

Итак, введем следующие условия на процесс $X(t)$:

E1 Существуют положительные a, β такие, что

$$\sigma(t) = 1 - a|t - t_0|^\beta (1 + o(1)) \text{ при } \ t \to t_0.$$

E2 (Локальная стационарность). Найдется $\alpha \in (0,2]$, что

$$r(s,t) = 1 - |t - s|^\alpha (1 + o(1)) \text{ при } \ s \to t_0, \ t \to t_0.$$

E3 (Регулярность). Существуют положительные g, G такие,что для всех s, t выполнено

$$E(X(t) - X(s))^2 \le G|t - s|^g.$$

Для разреженной сетки допустим, что вершина сетки попадает в точку максимума дисперсии, остальные варианты не интересны. Разреженная сетка и сетка Пикандса не зависят от расположения точки максимума.
Также напомним принятое обозначение: $\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/2}$.

Теорема.
Предположим, что дисперсия гауссовского процесса $X(t)$, $t \in [0,T]$, достигает своего единственного максимального значения в точке t_0, являющейся внутренней точкой отрезка $[0,T]$. Предположим также, что выполнены условия **E1 – E3**. *Тогда*

(i) если $\beta > \alpha$, то

• Для плотной сетки результат полностью совпадает с непрерывным случаем, доказанным ранее в Теореме 10.1 [n1].

• Для сетки Пикандса

$$P(\max_{t\in[0,T]\cap\mathcal{R}_p(b,\gamma)} X(t) > u) = \frac{2H_{\alpha,b}\Gamma(1/\beta)}{a^{1/\beta}\beta}u^{2/\alpha-2/\beta}\Psi(u)(1+o(1)) \quad \text{при } u\to\infty,$$

где

$$0 < H_{\alpha,b} = \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{H_\alpha(b,\Lambda)}{\Lambda} < \infty, \quad H_\alpha(b,\Lambda) = E\exp\left(\max_{k:kb\in[0,\Lambda]}\chi(kb)\right).$$

• Для разреженной сетки

$$P(\max_{t\in[0,T]\cap\mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u) = \frac{\Gamma(1/\beta)}{a^{1/\beta}\beta}u^{2/\gamma-2/\beta}\Psi(u)(1+o(1)).$$

(ii) если $\beta = \alpha$, то

• Для плотной сетки результат полностью совпадает с непрерывным случаем, доказанным ранее в Теореме 10.1 [n1].

• Для сетки Пикандса

$$P(\max_{t\in[0,T]\cap\mathcal{R}_p(b,\gamma)} X(t) > u) = H^a_{\alpha,b}\Psi(u)(1+o(1)) \quad \text{при } u\to\infty,$$

где

$$0 < H^a_{\alpha,b} = \lim_{\Lambda\to\infty} H^a_\alpha(\Lambda,\Lambda,b) < \infty, \quad H^a_\alpha(\Lambda,\Lambda,b) = E\exp\left(\max_{k:kb\in[-\Lambda,\Lambda]}\chi(kb) - a|kb|^\alpha\right);$$

• Для разреженной сетки

$$P(\max_{t\in[0,T]\cap\mathcal{R}_s(\gamma)} X(t) > u) = \Psi(u)(1+o(1)) \quad \text{при } u\to\infty.$$

(iii) если $\beta < \alpha$, то для всех сеток получим

$$P(\max_{t\in[0,T]\cap\mathcal{R}} X(t) > u) = \Psi(u)(1+o(1)) \quad \text{при } u\to\infty$$

где $\mathcal{R}$ – нужная сетка из трех.

Источники и литература

1) Питербарг В.И. *Двадцать лекций по гауссовским процессам.* Изд-во МЦМНО, 2015.

2) Vladimir I. Piterbarg *Discrete and Continuous Time Extremes of Gaussian Processes.* Kluwer Academic Publishers, 2004.