Секция «Геометрия и топология»

Инварианты слоения Лиувилля на поверхностях постоянной энергии для аналога случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Кибкало Владислав Александрович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Широко известен случай Ковалевской интегрируемости уравнений динамики твердого тела. Данный случай допускает включение в однопараметрическое семейство (с вещественным параметром $\varkappa$) интегрируемых систем на пучке алгебр Ли $so(3,1)-e(3)-so(4)$, найденное И.В. Комаровым. С историей вопроса, обозначениями и результатами И.К. Козлова можно ознакомиться по его работе [2].

Исследуется топология замыканий решений системы, которые образуют трехмерные неособые поверхности Q^3. Слоение Лиувилля на Q^3 можно различать с точностью до лиувиллевой эквивалентности при помощи инварианта Фоменко-Цишанга (иначе называемого меченой молекулой). Это некоторый конечный граф с буквами в вершинах и числовыми метками. Ребра соответствуют семействам регулярных торов Лиувилля, вершины — их перестройкам, а метки — диффеоморфизмам склейки при перестройках. Данная теория подробно описана в [1].

Прежде докладчиком был описан алгоритм построения меченой молекулы слоения данной системы, соответствующей некоторой допустимой кривой в образе отображения момента. Вопрос реализации и классификации не обсуждался. В данном докладе будут представлены два новых результата.

Во-первых, найден полный список меченых молекул слоений Лиувилля на изоэнергетических поверхностях $Q^3_{a,b,h} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{J}) | f_1 = a, f_2 = b, H = h\}$, встречающихся в системе.

Множество всех точек $\mathbb{R}^3(a,b,h)$, которым соответствует непустая поверхность Q^3, имеет структуру клеточного комплекса. Его трехмерные клетки — компоненты связности подмножеств, точкам которых соответствуют $Q^3_{a,b,h}$ с эквивалентными слоениями Лиувилля. Оставшиеся точки, которым соответствуют особые поверхности, вместе образуют клетки меньших размерностей. Для описания комбинаторного устройства комплекса приведем два графа. Один из них кодирует 2-остов этого комплекса. Другой граф отражает отношение соседства двух подмножеств: его вершинам соответствуют трехмерные клетки, ребрам — двумерные, граням — одномерные. Принадлежность двух поверхностей соседним областям означает возможность перестройки слоения Лиувилля на одной из них в слоение Лиувилля на другой.

Для строгого обоснования взаимного расположения разделяющих поверхностей был найден ряд замен в классе функций Казимира, о чем также будет сказано.

Теорема

1) Составлен полный список инвариантов Фоменко-Цишанга слоений Лиувилля изоэнергетических поверхностей, встречающихся в данной системе.

2) Для каждой меченой молекулы из списка множество троек (a,b,h), для которых $Q^3_{a,b,h}$ является неособой и имеет данную меченую молекулу, является конечным набором связных областей в R^3.

3) Представлены два графа, которые полностью задают комбинаторное строение комплекса: расположение данных областей и устройство их границ.

Список литературы

1) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск, 1999.

2) Козлов И.К. Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ // Матем. сб.. 2014. No. 4. С. 79-120.