Секция «Геометрия и топология»

Квазиторические стабильно нормально расщепимые представители в кольце комплексных кобордизмов

Научный руководитель – Бухштабер Виктор Матвеевич

Соломадин Григорий Дмитриевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: blastbeatscythe@gmail.com

Милнор [1] и Новиков [2] доказали, что в каждом классе $x \in \Omega_U^*$ кольца комплексных кобордизмов ($n > 0$) имеется неособое проективное алгебраическое многообразие (вообще говоря, несвязное). В доказательстве использовались неособые гиперповерхности $H_{i,j}$ бистепени $(1,1)$ в произведении комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$. Данные гиперповерхности имеют структуру проективного локально тривиального расслоения над $\mathbb{C}P^i$ при $i \leq j$. Артан и Булле, затем Рэй [3] (более конструктивно) доказали, что в каждом классе комплексных кобордизмов имеется стабильно комплексное многообразие, стабильно комплексные касательное и нормальное расслоения которого расщепляются в сумму одномерных комплексных расслоений. Данные свойства будем называть стабильной касательной/нормальной расщепимостью соответствующего стабильно комплексного многообразия. Напомним, что многообразие ограниченных флагов определяется как некоторое подмногообразие n-мерных флагов F_n, и является некоторой башней $\mathbb{C}P^1$-расслоений над точкой (т.е. башней Ботта). Используемые Рэем в [3] многообразия топологически являются гиперповерхностями в произведении многообразий ограниченных флагов [4] $BF_i \times BF_j$. Однако многообразия из работы [3] не являются алгебраическими, так как определяются при помощи нестандартной комплексной структуры. Бухштабер и Рэй [6], а также Бухштабер, Панов и Рэй [5] показали, что в каждом классе комплексных кобордизмов имеется стабильно комплексное многообразие, которое является квазиторическим (торическим в терминологии Дэвиса-Янушкевича). Они, в свою очередь, рассматривали ([6]) неособые проективные торические гиперповерхности $BR_{i,j}$ в $BF_i \times \mathbb{C}P^j$. Одно из свойств квазиторических многообразий состоит в стабильной касательной расщепимости. Однако свойство стабильной нормальной расщепимости, вообще говоря, не имеет для них места. В частности, $BR_{i,j}$ не является стабильно нормально расщепимым для $j > 2$ (результат). Было замечено ([6]), что имеется отображение $f_i : BF_i \to \mathbb{C}P^i$ степени 1, относительно которого $BR_{i,j}$ является индуцированным расслоением проективного расслоения $H_{i,j} \to \mathbb{C}P^i$.

Я доказываю, что в каждом классе кольца комплексных кобордизмов Ω_U^* имеется представитель: квазиторическое стабильно касательно и нормально расщепимое многообразие. Этот результат обобщает результаты работ [3],[5],[6]. Я определяю гиперповерхности $S_{i,j} \subset BF_i \times BF_j$ похожим с [3] образом. Далее доказываю, что $S_{i,j}$ получается последовательностью $j-1$ раздутий инвариантных подмногообразий $BR_{i,j}$. Как следствие, $S_{i,j}$ является торическим стабильно нормально расщепимым многообразием. Данные многообразия имеют отображения степени 1 в многообразия $BR_{i,j}, H_{i,j}$, соответственно. $S_{i,j}$ оказывается раздутием некоторой башни Ботта в инвариантном подмногообразии комплексной коразмерности 2. Многогранник моментов торического многообразия $S_{i,j}$ комбинаторно эквивалентен срезке одной грани куба коразмерности 2, в частности, является флаговым. (За исключением $S_{0,j} = BF_{j-1}$ с многогранником моментов, комбинаторно эквивалентным кубу.) Одним из новых методов моей работы является задание многообразия ограниченных флагов BF_i уравнениями в однородных координатах произведения проективных пространств $\prod_{k=1}^{i} \mathbb{C}P^k$.

Источники и литература

1) J. W. Milnor, “On the Stiefel-Whitney numbers of complex manifolds and of spin manifolds”, Topology, **3** (1965),223–230
2) S. P. Novikov, “Homotopy properties of Thom complexes”, Mat. Sb. (N.S.), **57(99)**:4 (1962), 407–442
3) N. Ray, “On a construction in bordism theory”, Proc. Edinburgh Math. Soc., **29:3** (1986), 413–422
4) V. M. Buchstaber, T. E. Panov, “Toric topology”, Mathematical Surveys and Monographs: 204, AMS, Providence, RI (2015), xiv+518pp.
5) V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, “Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds”, Mosc. Math. J., **7:2** (2007), 219–242, 350
6) V. M. Buchstaber, N. Ray, “Toric manifolds and complex cobordisms”, Russian Math. Surveys, **53:2** (1998), 371–373