Секция «Геометрия и топология»

О движении эллипсоида по гладкой плоскости

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Сечкин Георгий Михайлович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: ego-rish@ya.ru

Мы изучим топологию динамики неоднородного эллипсоида вращения, движущегося по гладкой горизонтальной плоскости, под действием силы тяжести.
Пусть распределение масс таково, что тело обладает осью динамической симметрии, которая совпадает с осью геометрической симметрии, причем центр масс лежит на этой оси (аналог волчка Лагранжа) на расстоянии s от центра тела. Гладкая связь (контакт) между телом и плоскостью обеспечивает движение без трения. То есть, мы не накладываем ограничения на мгновенную скорость точки контакта тела и плоскости. Основная цель нашего исследования является лиувиллева классификация возникающих слоений Лиувилля на трехмерных изоэнергетических поверхностях, см. [1].
Рассмотрим неподвижную в объемлющем трехмерном пространстве систему координат O_{xyz}, связанную с гладкой плоскостью, и $Q_{e_1e_2e_3}$ - главные центральные оси (см. рис. 1).
Введем следующие обозначения:
$\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$ - скорость центра масс в системе O_{xyz},
$\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ - вектор угловой скорости в осях $Q_{e_1e_2e_3}$,
$\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ - единичный вектор восходящей нормали в $Q_{e_1e_2e_3}$,
(b_1, b_1, b_3) - главные полуоси эллипсоида, m - масса тела,
$\mathbf{A} = diag(A_1, A_1, A_3)$ - диагональный тензор инерции,
$\bar{r}(\bar{\gamma})$ - радиус-вектор из центра масс в точку касания с плоскостью,
$\bar{N} = N\bar{\gamma}$ - вектор реакции плоскости, где N - величина реакции плоскости, g - центр тяжести.
Исследуемая задача обладает пятью параметрами:
A_1, A_3 - полуоси эллипсоида инерции;
b_1, b_3 - полуоси эллипсоида; иногда, для удобства, мы будем обозначать "относительную сжатость" эллипсоида параметром $c = b_3^2 - b_1^2$;
$s = SQ$ - расстояние между геометрическим центром и центром масс.
Лемма 1. Движение эллипсоида по гладкой плоскости задается уравнениями, аналогичными уравнениям Эйлера-Пуассона [2].

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\bar{\omega}} + [\bar{\omega}, \mathbf{A}\bar{\omega}] = [\bar{r}, m(\dot{v}_z + g)\bar{\gamma}], \\ \dot{\bar{\gamma}} + [\bar{\omega}, \bar{\gamma}] = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Система, записанная в координатах $(\bar{\omega}, \bar{\gamma})$, обладает первыми интегралами:
1) $\Gamma = \langle \bar{\gamma}, \bar{\gamma} \rangle$ - геометрический интеграл. Он выражает постоянство суммы квадратов проекций единичного вектора, фиксированного в неподвижной системе координат, на оси системы координат, связанной с телом.
2) $G = \langle \mathbf{A}\bar{\omega}, \bar{\gamma} \rangle$ - интеграл площадей. Выражает собой проекцию кинетического момента на вертикальную ось $\bar{\gamma}$. Он возникает из-за инвариантности вращений тела относительно вертикали.

3) $E = \frac{1}{2}\langle \mathbf{A}\bar{\omega}, \bar{\omega}\rangle + U$ - интеграл энергии, где U - потенциал.
4) Однако, для полной интегрируемости нам недостает одного независимого интеграла [2], который в данной постановке задачи существует, а именно, $K = S_3$ - интеграл Лагранжа.
Теорема 1. Уравнения движения шероховатого эллипсоида на гладкой плоскости являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю.

Как известно, изоэнергетическое многообразие расслоено на торы Лиувилля, которые изменяются только в точках бифуркации задачи.
Чтобы описать перестройку достаточно знать матрицу перехода от одного базиса на торе к другому. А.Т.Фоменко и Х.Цишанг показали (см. [3]), что вместо матрицы можно ограничить рассмотрение тремя инвариантами.
Совпадение данных инвариантов у разных систем позволяет говорить о послойной Лиувиллевой эквивалентности.
Теорема 2. Система динамически симметричного эллипсоида на гладкой плоскости полностью вкладывается, в смысле лиувиллевой эквивалентности (на множестве изоэнергетических 3−поверхностей), в систему тяжелого гиростата Жуковского-Вольтерра. То есть для любого значения параметров задачи эллипсоида существуют такие параметры системы Жуковского-Вольтерра, для которых инварианты совпадают.

Источники и литература

1) *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999
2) *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика, Москва, Академия, 2010 год
3) *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы Изв. АН СССР. Сер. матем., 1990, 54:3, 546–575

Иллюстрации

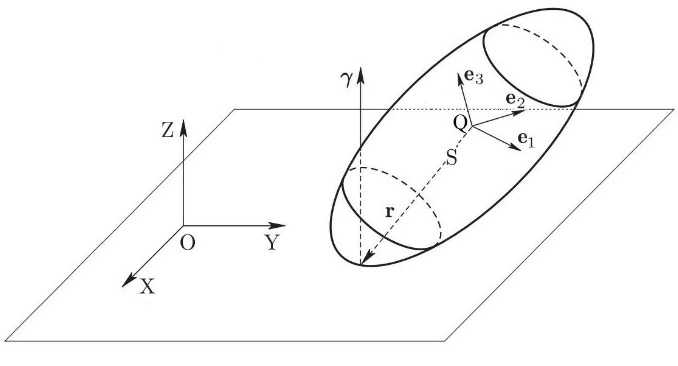

Рис. 1. Эллипсоид на плоскости