Секция «Геометрия и топология»

Оптимальное положение компактов в пространствах с еклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа.

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Малышева Ольга Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: osm95@mail.ru

Вопрос посвящен изучению геометрии метрического пространства компактных подмножеств n-мерного евклидова пространства, рассматриваемых с точностью до движения, сохраняющего ориентацию объемлющего пространства. Метрика Хаусдорфа — это функция расстояния Хаусдорфа на множестве всех ограниченных и замкнутых подмножеств метрического пространства.В 1979 году М.Л.Громов ввел специальное расстояние между произвольными метрическими пространствами, называемое расстоянием по Громову–Хаусдорфу. Это обобщение метрики Хаусдорфа. Говоря неформально, метрика Громова–Хаусдорфа позволяет выяснить, насколько можно совместить два компакта. Она имеет практическое применение и играет важную роль в теории распознавания образов.

Пусть A и B — непустые замкнутые ограниченные подмножества данного метрического пространства. *Расстоянием по Хаусдорфу* между этими множествами называется величина

$$d_H(A,B)=\inf\Big\{r:\big(A\subseteq B_r(B)\big)\wedge\big(B\subseteq B_r(A)\big)\Big\}.$$

Расстоянием в евклидово инвариантной метрике Громова–Хаусдорфа между A и B называется величина

$$\mathrm{d}_{EGH}(A,B)=\inf_O\Big\{\mathrm{d}_H(A,OB)\Big\},$$

где O — движение пространства, сохраняющее ориентацию.

Движение O, на котором достигается $d_{EGH}(A,B)$, будем называть *оптимальным*, а пару (A,OB) — *оптимальным взаимным расположением.*

Основная часть работы посвящена примерам оптимальных положений. Разбирается несколько частных случаев. В первом из примеров один из компактов является одноточечным. Тогда в оптимальном положении одноточечный компакт совпадает с чебышевским центром второго компакта.

Второй частный случай – взаимное расположение двух двухточечных компактов. Показывается, что тогда в оптимальном положении эти компакты находятся на одной прямой, а их середины (чебышевские центры) совпадают.

Третий пример касается оптимального расположения трехточечного и двухточечного компактов. Приводится ответ для ряда таких расположений. Интересным следствием является пример оптимального взаимного расположения, при котором чебышевские центры обоих компактов не совпадают. Этот же пример показывает, когда оптимальное положение не единственно.

Наконец, доказывается теорема: Пусть непустые компакты A и B находятся в оптимальном положении. Тогда все компакты между A и B, в паре с каждым из компактов A и B, — тоже в оптимальном положении в смысле евклидово инвариантной метрики Громова–Хаусдорфа. Приводится ряд следствий, являющихся приложением этой теоремы.

Список литературы

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи матем. наук. 1964. Т. 19, Вып. 6. С. 139-145.

[3] Казаков А.Л., Лебедев П.Д. Построение наилучших круговых аппроксимаций множеств на плоскости и на сфере. XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва 16-19 июня 2014 г

[4] Сосов Е.Н. Геометрии выпуклых и конечных множеств геодезического пространства. Казанский Государственный Университет, 2010.

[5] Facundo Memoli, Gromov-Hausdorff distances in Euclidean spaces. Stanford University, Mathematics Department Stanford, CA 94305

[6] Кисловская А.Д., Дипломная работа Геометрия конфигураций в пространствах с евклидово инвариантной метрикой типа Громова-Хаусдорфа. Москва, Московский Государственный Университет, 2013.

.