

## Высотные атомы с группой симметрий транзитивной на кольцах одного цвета

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Трифонова Виктория Александровна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
 Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и  
 приложений, Москва, Россия

E-mail: trifonovaviktoriya2012@yandex.ru

Пусть  $M^2$  - гладкое компактное двумерное многообразие,  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  - функция Морса на  $M^2$  и  $\{x \in M^2 : f = k, k \in \mathbb{R}\}$  - её особый уровень. Тогда существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$  не содержит особых точек, кроме лежащих на особом уровне ( $\{f = k\}$ ).

**Определение 1.** Атомом называется пара  $(f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]), f^{-1}(k))$  с указанием вложения графа  $f^{-1}(k)$  в поверхность  $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$ . Атом называется ориентируемым, если эта поверхность ориентируема. Граф  $f^{-1}(k)$  называется остовом атома. Два атома называются изоморфными, если существует гомеоморфизм пар, который переводит поверхность в поверхность (сохраняя ориентацию, если поверхность ориентирована), остов в остов, а функцию переводит в функцию. Будем говорить, что атом  $(f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]), f^{-1}(k))$  порожден функцией  $f$ . Второе эквивалентное определение атома как "оснащённой" пары см. в [1]

**Определение 2.** Назовем атом, порожденный функцией  $f$  высотным, если существует такое вложение  $g : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , что  $f(p) = z(g(p))$  для каждой точки  $p \in g(M^2)$ , где  $z$  — стандартная координата в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , т. е.  $z$  — функция высоты на  $g(M^2)$ .

**Определение 3.** Симметрией атома  $X = (P^2, K)$  называется сохраняющий ориентацию и оснащение гомеоморфизм оснащенной пары  $(P^2, K)$  на себя, рассматриваемый с точностью до изотопии, т.е. класс эквивалентности изотопных гомеоморфизмов оснащенной пары  $(P^2, K)$  на себя. Отметим, что при таком определении группа  $\text{SYM}(X)$  симметрий атома  $X = (P^2, K)$  дискретна.

**Определение 4.** Конечный связный граф  $\Gamma$ , некоторые ребра которого ориентированы, называется ориентированным  $f$ -графом, если все его вершины имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра-петли. Подробнее о построении  $f$ -графа по атому и его свойствах в [1, 2, 3]

**Определение 5.** Атом  $X = (P^2, K)$  является максимально симметричным тогда и только тогда, когда группа его симметрий  $\text{SYM}(X)$  транзитивно действует на множестве ребер атома  $X$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $X = (P^2, K)$  - атом с группой симметрий  $\text{SYM}(X)$ , а  $\Gamma$  - соответствующий ему  $f$ -граф. Тогда  $\text{SYM}(X)$  транзитивно действует на кольцах одного цвета  $\iff \text{SYM}(\Gamma)$  транзитивно действует на ориентированных циклах.

**Утверждение 2.** Группа симметрий максимально симметричных высотных атомов транзитивно действует на кольцах одного цвета.

**Утверждение 3.** Атомы, соответствующие архимедовым телам, являются высотными, и их группа симметрий транзитивно действует на кольцах одного цвета.

**Теорема.** Если группа симметрий  $\text{SYM}(X)$  высотного атома  $X = (P^2, K)$  действует транзитивно на его вершинах и в соответствующем  $f$ -графе  $\Gamma$  каждый ориентированный цикл содержит одинаковое количество вершин, то группа симметрий  $\text{SYM}(X)$  транзитивно

действует на кольцах одного цвета и атом  $X = (P^2, K)$  является либо максимально симметричным, либо одним из серии  $D_n''$ , ( $n \geq 1$ ),  $P_1''$ ,  $P_2''$ ,  $P_3''$ ,  $P_4''$ ,  $P_5''$ . Описание каждого атома из этой серии дано в [3]

### Источники и литература

- 1) Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы, т. 1, // Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 444 с., (1999).
- 2) И. М. Никонов, Н. В. Волчанецкий, “Максимально симметричные высотные атомы”// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 2013,— №2 .— С. 5-8
- 3) И. М. Никонов, “Высотные атомы с транзитивной на вершинах группой симметрий” //в печати