Секция «Геометрия и топология»

Свойства отображения, сопоставляющего каждому метрическому компакту семейство его компактных подмножеств.

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Михайлов Иван Александрович

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: iamikhaylov@hotmail.com

Пусть X, Y — непустые компактные подпространства метрического пространства Z, тогда расстоянием по Хаусдорфу между X и Y называется величина $|XY|_Z = \max\{\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}|xy|, \sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x\in X}|yx|\}$.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем реализацией пары (X, Y). Расстоянием по Громову-Хаусдорфу $|XY|$ между X и Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация пары (X, Y) такая, что $|X'Y'|_Z \le r$.

Пространство $\mathcal{M}$ изометрических классов компактных метрических пространств с метрикой Громова-Хаусдорфа называется пространством Громова-Хаусдорфа.

Множество $\mathcal{H}(X)$ всех непустых компактных подмножеств компактного метрического пространства X, наделенное метрикой Хаусдорфа, тоже компактно[1].

Множество $\mathcal{H}_G(X)$ изометрических классов непустых компактных подмножеств компактного метрического пространства X, наделенное метрикой Громова-Хаусдорфа, тоже компактно, в силу замкнутости и выполнения критерия Громова предкомпактности.

Определим два отображения $\mathcal{H} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, X \mapsto \mathcal{H}(X)$ и $\mathcal{H}_G : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, X \mapsto \mathcal{H}_G(X)$.

Общая задача состоит в нахождении и исследовании изометрий пространства Громова-Хаусдорфа в себя. Существует гипотеза, что не бывает биективных изометрий пространства Громова-Хаусдорфа на себя, кроме тождественного отображения. Были построены примеры локальных изометрий. Это задача интересна тем, что нахождение расстояния по Громову-Хаусдорфу очень трудоемкая задача, поэтому наличие изометричного отображение облегчило бы нахождение этого расстояния.

В докладе доказаны следующие результаты:

1. Для любых компактных метрических пространств X и Yимеем $|XY|_Z = |\mathcal{H}(X)\mathcal{H}(Y)|_{\mathcal{H}(Z)}$.

2. Отображения $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_G$ являются 1-липщицевыми и, следовательно, непрерывными.

3. Если компактное метрическое пространство X связно, то $\mathcal{H}(X)$ и $\mathcal{H}_G(X)$ тоже связны.

4. Если X — двуточечное метрическое пространство, а Y любое компактное метрическое пространство с диаметром меньшим чем у X, то $|XY| = |\mathcal{H}_G(X)\mathcal{H}_G(Y)|$.

Выражаю благодарность своему научному руководителю Тужилину А.А. и его коллеге Иванову А.О. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Источники и литература

1) Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. Москва; Ижевск, 2004.