Секция «Геометрия и топология»

Задача о качении сферы по плоскости и приложения критерия замкнутости

Научный руководитель – Ошемков Андрей Александрович

Рембовская Александрина Юрьевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

E-mail: alya.rembovskaya@gmail.com

В теории оптимального управления известна задача о качении сферы(без проскальзываний и прокручиваний) по плоскости. Она заключается в том, чтобы найти такую траекторию минимальной длины, что сфера при качении по ней перейдет из одного заранее заданного положения в другое. Оказалось, что эта задача связана с задачей об эластиках [1]. Связь между ними исследована в работе [2], а в работе [3] описан некоторый компьютерный алгоритм, позволяющий искать оптимальные траектории.

Постановка задачи: Пусть сфера катится по ломаной, расположенной на плоскости. Требуется понять при каких условиях траектории, описываемые точкой касания будут замкнуты и на сфере, и на плоскости, а также привести примеры таких замкнутых ломаных на плоскости, что при качении сферы по ним, траектория точки касания на сфере также будет замкнута и понять, как устроены эти примеры.

Теорема Ломаная замкнута на плоскости тогда и только тогда, когда её ёж нулевой.

Теорема Ломаная на сфере замкнута тогда и только тогда, когда результирующий кватернион вращений сферы задаёт вращение только вокруг вертикальной оси.

В классе треугольников и параллелограммов найдены и описаны все такие примеры.

Утверждение Пусть ломаная это треугольник. Тогда соответствующая ломаная на сфере замкнута тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- Длины всех сторон треугольника кратны 2π
- Одна из сторон треугольника имеет вид: $2\pi n$, где $n \in \mathbb{N}$, а две другие имеют вид: $\pi + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{N}$.

Утверждение Пусть ломаная это параллелограмм. Тогда соответствующая ломаная на сфере замкнута тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- Длины всех сторон кратны π
- Одна пара сторон имеет длины: $2\pi n$, где $n \in \mathbb{N}$, а другая пара сторон любой длины.

Для ломаных с числом звеньев больше либо равным 5 найден алгоритм, который позволяет построить множество примеров ломаных, которые замкнуты как на плоскости, так и на сфере, что видно из следующего утверждения.

Утверждение К любой ломаной с числом звеньев больше либо равным 2 можно достроить 3 звена так, что ломаная будет замкнута и на сфере, и на плоскости.

Источники и литература

1) Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Академии Наук, Приложение I, "Об упругих кривых", ГТТИ, Москва-Ленинград, 1934

2) V. Jurdjevic, Geometric Control Theory, Cambridge University Press, 1997
3) Ардентов А. А., Маштаков А. П., Эйлеровы эластики и качение сферы по плоскости, Переславль-Залесский, 2007