Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О различных типах асимптотического поведения положительных решений с бесконечной производной уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна

Дулина К.М.[1], *Корчемкина Т.А.*[1]

1 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

Рассматривается уравнение типа Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\ |y|^k\ \operatorname{sgn} y, \quad k > 0, k \neq 1, \tag{1}$$

где функция $p(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x и липшицева по $u,\, v$. Исследуется асимптотическое поведение положительных решений уравнения (1) вблизи правой границы области определения в случае неограниченной сверху и неотделенной от нуля снизу положительной функции $p(x,\, u,\, v)$. И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в монографии [1] описано асимптотическое поведение всех максимально продолженных решений для $p \equiv p(x)$. Авторами также получены условия существования решений, для которых $\lim\limits_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$. Оставался открытым вопрос различения двух случаев:

$$\lim_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} |y(x)| = +\infty, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} |y(x)| < +\infty. \tag{3}$$

С использованием методов, изложенных в работах [2, 3], получены условия на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при которых все положительные максимально продолженные вправо решения уравнения (1) обладают свойством (2), то есть имеют вертикальную асимптоту. Также получены достаточные условия на функцию $p(x,\, u,\, v)$, при которых все рассматриваемые решения обладают свойством (3), то есть являются так называемыми *black-hole* решениями (см. [4]), и условия, при которых решения уравнения (1) могут быть продолжены на всю числовую ось. Полученные условия являются обобщением результатов [5].

Теорема 1. Пусть для некоторых $u_0,\, v_0 > 0$ функция $p(x,\, u,\, v)$ при $u > u_0,\ v > v_0$ представима в виде $h(u)g(v)$, где функции $h(u)$, $g(v)$ непрерывны и отделены снизу от нуля, а в случае $0 < k < 1$ еще и функция $p(x,u,v)/|v|$ при $v \neq 0$ отделена снизу от нуля. Тогда любое максимально продолженное вправо решение $y(x)$ уравнения (1) с начальными условиями $y(x_0) \geq u_0,\ y'(x_0) \geq v_0$ обладает свойством (2) тогда и только тогда, когда

$$\int_{v_0}^{+\infty} \frac{v\,dv}{g(v)} = +\infty. \tag{4}$$

Теорема 2. Пусть в случае $k > 1$ $(0 < k < 1)$ функция $p(x,\, u,\, v)$ $(p(x,u,v)/|v|)$ отделена снизу от нуля, причем для некоторых $u_0,\, v_0 > 0$ при $u > u_0,\ v > v_0$ справедливо неравенство $p(x,u,v) \leq f(x,\, u)g(v)$, где функция $f(x,\, u)$ непрерывна по совокупности переменных, а функция $g(v)$ непрерывна, отделена снизу от нуля и удовлетворяет условию (4). Тогда любое максимально продолженное вправо решение $y(x)$ уравнения (1) с начальными условиями $y(x_0) \geq u_0,\ y'(x_0) \geq v_0$ обладает свойством (2).

Теорема 3. Пусть в случае $k > 1$ ($0 < k < 1$) функция $p(x, u, v)$ ($p(x, u, v)/|v|$) отделена снизу от нуля, причем для некоторых u_0, $v_0 > 0$ при $u > u_0$, $v > v_0$ справедливо неравенство $p(x, u, v) \geq g(v)$, где функция $g(v)$ непрерывна, отделена снизу от нуля, и условие (4) не выполнено. Тогда любое максимально продолженное вправо решение $y(x)$ уравнения (1) с начальными условиями $y(x_0) \geq u_0$, $y'(x_0) \geq v_0$ обладает свойством (3), причем

$$a - x_0 < \frac{1}{y^k(x_0)} \int\limits_{y'(x_0)}^{+\infty} \frac{dv}{g(v)}.$$

Теорема 4. Пусть $k \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, для некоторых u_0, v_0, $C > 0$, $\alpha > k - 1$ при $u > u_0$, $v > v_0$ справедливо неравенство $p(x, u, v) \leq C|v|^{-\alpha}$. Тогда любое решение $y(x)$ уравнения (1) с начальными условиями $y(x_0) \geq u_0$ и $y'(x_0) \geq v_0$ неограниченно продолжается вправо и

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} y'(x) = +\infty.$$

В работе [6] приведены различные примеры, демонстрирующие применение сформулированных выше результатов.

Источники и литература

1) Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.
2) Асташова И. В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.
3) Асташова И. В. Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Известия РАН. 2008. Т. 72. № 6. С. 103–124.
4) Jaroš J., Kusano T. On black hole solutions of second order differential equations with a singular nonlinearity in the differential operator // Funkcialaj Ekvacioj. 2000. V. 43. № 5. P. 491–509.
5) Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1574–1576.
6) Дулина К. М. Об асимптотическом поведении решений с бесконечной производной регулярных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 2. С. 207–214.