Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

# Неравенства между показателями колеблемости и вращаемости решений линейных дифференциальных систем

**Научный руководитель – Сергеев Игорь Николаевич**

***Кокушкин Владислав Игоревич***
*Аспирант*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
*E-mail: vladis-love@bk.ru*

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество *линейных систем*

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0;\infty),$$

отождествляемых каждое со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, где $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ — множество всех линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}^n$ множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$, и, соответственно, всех таких систем.

**Определение 1.**Для функции $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ и числа $t > 0$ введем следующие понятия[2]:

- $\mathrm{N}(u,t)$ — *нормированное*, т.е. умноженное на $\pi$, *число нулей функции* $u$ на промежутке $(0;t]$. Ситуацию, при которой хотя бы один нуль на отрезке $[0;t]$ является кратным (т.е. когда обнуляется производная $\dot{u}$) считаем *вырожденной* и кладем по определению $N(u,t) = \infty$.
- $\mathrm{P}(u,t) \equiv \int_0^t |\partial e(u,\tau)/\partial\tau| dt$ — *вариация следа* $e(u,\tau) \equiv u(\tau)/|u(\tau)|$ функции $u$ за время от 0 до $t$, причем если функция $u$ имеет на отрезке $[0;t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\mathrm{P}(x,t) = \infty$.
- $\Gamma(u,t) \equiv \mathrm{P}(u,t) + \mathrm{N}(u,t)$ — *частотная вариация следа* функции $u$ за время от 0 до $t$.

**Определение 2.** Для функции $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ и числа $t > 0$ введем следующие понятия[2]:

- $\Theta(u,t) \equiv |\varphi(u,t)|$ — модуль непрерывного *ориентированного угла* $\varphi(u,t)$, между подвижным вектором $u(t)$ и начальным вектором $u(0)$ с закрепленным начальным значением $\varphi(u,0) = 0$ и со следующей поправкой: если функция $u$ имеет на отрезке $[0;t]$ хотя бы один нуль, то полагаем $\Theta(u,t) = \infty = \varphi(u,t)$.
- $\Omega(u,t) \equiv \int_0^t |\partial\varphi(u,\tau)/\partial\tau|\, d\tau$ — *вариация угла* функции $u$ за время от 0 до $t$, причем если функция $u$ имеет на отрезке $[0;t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\Omega(u,t) = \infty$.

**Определение 3.** Пусть заданы индекс $k \in \{1,\ldots,n\}$ и функционал $\mathrm{K} : \mathcal{S}^k \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,

- определим *слабый* и *сильный нижние показатели* решения $x \in \mathcal{S}(A)$ соответственно

$$\check{\varkappa}^{\circ}(x) = \inf_{L \in \mathrm{End}_k \mathbb{R}^n} \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \mathrm{K}(Lx, t), \quad \check{\varkappa}^{\bullet}(x) = \varliminf_{t \to \infty} \inf_{L \in \mathrm{End}_k \mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \mathrm{K}(Lx, t), \qquad (1)$$

- теми же формулами, но с заменой в них нижних пределов верхними, определим одноименные *верхние* показатели $\hat{\varkappa}^{\circ}(x)$ и $\hat{\varkappa}^{\bullet}(x)$, причем в случае совпадения верхних показателей с нижними будем называть их *точными*, опуская в их обозначениях галочки и крышечки.

**Определение 4.** Следуя определению 3, при $k = 1$ и $\mathrm{K} = \mathrm{N}$ можно построить показатель *колеблемости* $\varkappa = \nu$; при $k = 2$ и $\mathrm{K} = \Gamma, \Theta, \Omega$ — показатели $\varkappa = \gamma, \theta, \omega$ *частотной*, *ориентированной* и *неориентированной вращаемости* соответственно.

Следующий результат есть усиление теорем 2 и 3, представленных в работе [1]:

**Теорема 1.** Существуют системы $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^3$, имеющие соответственно:

- Решение $x_1 \in \mathcal{S}(A_1)$ с точными показателями

$$0 = \theta^{\circ}(x) < \theta^{\bullet}(x) < \nu^{\circ}(x) < \nu^{\bullet}(x) = \gamma(x)^{\bullet} < \omega^{\bullet}(x).$$

- Решение $x_2 \in \mathcal{S}(A_2)$ с точными показателями

$$0 = \theta^{\circ}(x) < \nu^{\circ}(x) < \theta^{\bullet}(x) < \nu^{\bullet}(x) = \gamma(x)^{\bullet} < \omega^{\bullet}(x).$$

## Источники и литература


1) Кокушкин В.И. Характеристики колеблемости и вращаемости решений линейных дифференциальных систем, // Дифференциальные уравнения, 2014, 50, №10 С. 1406–1407.
2) Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. ИМИ УдГУ, 2015, выпуск №2(46), С. 171–183.