Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Краевые задачи для нелинейного уравнение второго порядка с дельта-образным потенциалом

Научный руководитель – Мукминов Фарит Хамзаевич

Гадыльшин Тимур Рустемович

Аспирант

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

E-mail: gtimr@yandex.ru

В работе рассматривается краевая задача

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\left(x,u\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,u)+q_1\left(x,u\right)+q_2(x)u+\varepsilon^{-1}Q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=f, \qquad x\in I,\\ l_a u^\varepsilon := h_a u^\varepsilon(a)-H_a\frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}x}(a)=0, \qquad l_b u^\varepsilon := h_b u^\varepsilon(b)+H_b\frac{\mathrm{d}u^\varepsilon}{\mathrm{d}x}(b)=0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $I=(a,b)$, h_a, h_b, H_a, $H_b\geqslant 0$, $h_a+H_a>0$, $h_b+H_b>0$ $k,p,q_1\in C^1(\overline{D})$, $q_2,Q\in C(\overline{I})$, $k(x,u)\geqslant k_0>0$, $q_2\left(x\right)\geqslant q_0>0$, $0<\varepsilon\ll 1$. Будем считать, что $\operatorname{supp}Q\subset[-1,1]$, а принадлежность $k\in C^1(\overline{D})$ влечет неравенство

$$\sup_{x\in\overline{I},|u|\leqslant M}\left(|k(x,u)|+|k_x(x,u)|+|k_u(x,u)|\right)<\infty.$$

Наложим следующее ограничение на среднее значение функции Q

$$\langle Q\rangle := \int\limits_{-1}^{1} Q(\tau)\mathrm{d}\tau > -\min\{k_0;q_0\}. \tag{2}$$

То есть среднее значение $\langle Q\rangle$ может быть и отрицательным.

Обозначим

$$\gamma=\min\{k_0;q_0;\langle Q\rangle+\min\{k_0;q_0\}\},$$
$$K_g(M)=\sup_{x\in\overline{I},|u|\leqslant M}\left|g_u(x,u)\right|,$$

где $g(x,u)$ — произвольная гладкая функция. Предполагается, что существуют такие постоянные M и $\gamma_1\in(0,\gamma)$, что выполнено неравенство

$$6K_p(2M)+2K_k(2M)M+2K_{q_1}(2M)<\gamma_1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2), (3). Тогда для любого $f\in L_2(I)$ такого, что $\|f\|_{L_2(I)}\leqslant\gamma_1 M/2$, для решения u^ε краевой задачи (1) справедливо равенство*

$$\|u^\varepsilon-u_0\|_{C(\overline{I})}=O(\varepsilon),$$

где u_0 решение краевой задачи

$$\begin{gathered}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\left(x,u_0\right)\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,u_0)+q_1\left(x,u_0\right)+q_2(x)u_0=f, \quad x\in I\backslash\{0\},\\ l_a u_0=0, \quad l_b u_0=0, \qquad k(0,u_0(0))\left(u_0'(+0)-u_0'(-0)\right)=\langle Q\rangle\, u_0(0).\end{gathered}$$