Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Эллиптическая теория для одного класса нелокальных операторов на прямой

Научный руководитель – Савин Антон Юрьевич

Жуйков Константин Николаевич

Студент (бакалавр)

Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия

E-mail: zhuykovcon@gmail.com

Рассмотрим класс операторов вида

$$D = \sum_{\substack{0\le\alpha+\beta\le N\\ 0\le\gamma\le 3}} a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha \left(-i\frac{d}{dx}\right)^\beta \mathcal{F}^\gamma, \tag{1}$$

действующих в пространстве Шварца. Здесь и далее $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье. Данный класс является аналогом класса операторов А. Конна на некоммутативном торе [3].

Символом оператора (1) будем называть выражение вида

$$\sigma(D) = \sum_{\substack{\alpha+\beta=N\\ 0\le\gamma\le 3}} a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha \xi^\beta F^\gamma,$$

которое рассматривается как элемент скрещенного произведения $C^\infty(\mathbb{S}^1)\rtimes\mathbb{Z}_4$ алгебры гладких функций на окружности $\mathbb{S}^1=\{x^2+\xi^2=1\}$ и группы поворотов $\mathbb{Z}_4$ (ср. [1]).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.

1) *Для операторов D_1, D_2 вида (1) имеет место формула композиции*

$$\sigma(D_1D_2)=\sigma(D_1)\sigma(D_2)\in C^\infty(\mathbb{S}^1)\rtimes\mathbb{Z}_4$$

2) *Если оператор D эллиптичен, т.е. его символ $\sigma(D)$ обратим, то D фредгольмов в пространствах Соболева на прямой (см. [2]).*

Источники и литература

1) Савин А. Ю., Стернин Б. Ю., “Некоммутативная эллиптическая теория. Примеры”, Дифференциальные уравнения и топология. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, 271, МАИК, М., 2010, 204–223
2) Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория (2-е изд.). М.: Добросвет, 2003
3) Connes, Alain. Noncommutative geometry. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994. pp. 356-375