

**Оценка использования памяти при реализации нелинейных регуляторов, с коэффициентами, зависящими от состояния, в квазилинейных системах управления**

Научный руководитель – Афанасьев Валерий Николаевич

*Семион Александр Александрович*

*Аспирант*

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Факультет математики, Москва, Россия

*E-mail: spin7ion@gmail.com*

## Введение

Летательные аппараты требуют высокой скорости расчета управляющего воздействия. Эти системы нередко можно представить в виде объектов с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния объекта. При использовании квадратичного функционала качества возможно перейти к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (State Dependent Riccati Equation). Использование SDRE усложняется некоторыми проблемами, связанными с созданием быстрого алгоритма решения матричного уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния, в темпе функционирования объекта [1]. В докладе предлагается сделать расчет необходимых коэффициентов заранее.

## Постановка задачи

Будем рассматривать в качестве объекта управления вертолет с четырьмя моторами (квадрокоптер). В работе предполагается, что текущее состояние системы точно известно. Необходимо синтезировать управление, стабилизирующее аппарат горизонтально.

## Уравнения движения

Подробно вывод уравнений движения квадрокоптера описан в [2]. Для описания вращения аппарата будет использована алгебра кватернионов. Математическая модель летательного аппарата представляет собой систему дифференциальных уравнений в стандартном виде:

$$\dot{X} = AX + BU, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} f(\vec{\lambda}) & -\frac{1}{2} \lambda_3 & \frac{1}{2} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \lambda_3 & \frac{1}{2} f(\vec{\lambda}) & -\frac{1}{2} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \lambda_2 & \frac{1}{2} \lambda_1 & \frac{1}{2} f(\vec{\lambda}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\vec{\lambda}) = \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}.$$

$X = (\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3)^T$  - вектор пространства состояний,  $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  - угловые скорости в системе координат, связанной с аппаратом,  $I_x, I_y, I_z$  - компоненты тензора инерции,

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  - компоненты кватерниона, описывающего поворот квадрокоптера в пространстве,  $U_1, U_2, U_3$  - внешние моменты, определенные через управления,  $U = (U_1 \ U_2 \ U_3)^T$  - вектор управлений.

## Синтез управления для объекта

Регулятор с дискретно изменяющимися параметрами подробно был освещен в [1]. Интервал функционирования разбивается на равные по длине промежутки. Управление на  $i+1$ -ом промежутке представляется в виде  $U_i = K(X_i) X_i = -R^{-1} B^T(X_i) S(X_i) X_i$ , где  $S(X_i)$  - решение уравнения Риккати вида

$$S(X_i) A(X_i) + A^T(X_i) S(X_i) - S(X_i) B(X_i) R^{-1} B^T(X_i) S(X_i) + Q = 0$$

Можно заметить, что матрица  $A$  зависит только от компонент кватерниона и угловых скоростей, а матрица  $B$  постоянна. В силу нормированности кватерниона все его компоненты лежат в пределах  $[-1; 1]$ . Мы будем полагать, что угловые скорости лежат в пределах  $[-20\text{рад/с}; 20\text{рад/с}]$ .

Примем, что необходимая точность компонент кватерниона, равна двум значащим цифрам после запятой. Можно представить, что все возможные значения компонент кватерниона укладываются на точки пересечений 3х-мерной сетки со стороной ячейки 0.01, ограниченной шаром единичного радиуса с центром в начале координат. Для выбранной точности существует 4187707 вариантов. Заметим, что для уменьшения необходимых вычислений и размера хранимой информации предлагается вычислить заранее и хранить в памяти микроконтроллера возможные произведения матриц  $R^{-1} B^T S(X_i) = K(X_i)$ . Матрица  $K(X_i)$  имеет размерность  $3 \times 6$ , таким образом для хранения одной матрицы с использованием типа данных float требуется 72 байта. Необходимое количество памяти приведено в таблице 1:

Точность	Объем памяти без учета угловых скоростей	Объем памяти с учетом угловых скоростей
0.1	291КБ	113.96МБ
0.01	287.547МБ	112ГБ
0.001	280ГБ	110ТБ

Таблица 1. Необходимое количество памяти в зависимости от точности

Для ускорения доступа к коэффициентам предлагается добавить дополнительную информацию в виде указателей на коэффициенты, вычисленные для соседних состояний. Для выбранной точности кватерниона потребуется дополнительно 95.8МБ памяти. Для поиска следующей матрицы коэффициентов необходимо последовательно двигаться по указателям вдоль каждой из компонент.

Для оценки скорости получения следующего коэффициента предположим, что за один такт состояние изменилось на противоположное при точности 0.01. Для поиска следующей ячейки необходимо пройти по 603 указателям и считать 43КБ. При скорости чтения 30МБ/с время получения новой матрицы  $K(X_i)$  составляет 1.4мс.

## Математическое моделирование

Для проверки полученных результатов было проведено численное моделирование. В качестве начальных условий был выбран вектор  $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.961524 \ 0)^T$ . Точность подсчета управления  $\epsilon = 0.01$ . На рисунке 1 представлены траектории движения системы и трех компонент матрицы  $K(X_i)$ . По мере увеличения точности траектории элементов матрицы будут приближаться к гладким. На рисунке 2 приведена траектория движения

текущей ячейки памяти. Можно убедиться, что траектория движения ячейки памяти с коэффициентом не выходит за пределы сферы.

## Заключение

В докладе предложен способ реализации SDC регулятора с хранением коэффициентов памяти в условиях ограниченности пространства состояний. Приведена оценка количества точек состояния системы и объем памяти, занимаемый коэффициентами регулятора в зависимости от выбранной точности. Описан способ эффективного размещения коэффициентов, обеспечивающий быстрое получение следующего состояния регулятора.

### Источники и литература

- 1) Афанасьев В.Н., Семион А.А. Регулятор с дискретно изменяющимися параметрами // Проблемы управления, Май 2014. с. 14-20.
- 2) Семион А. А. Разработка автопилота для квадрокоптера // Качество. Инновации. Образование. 2016. № 6. с. 53-67.

### Иллюстрации

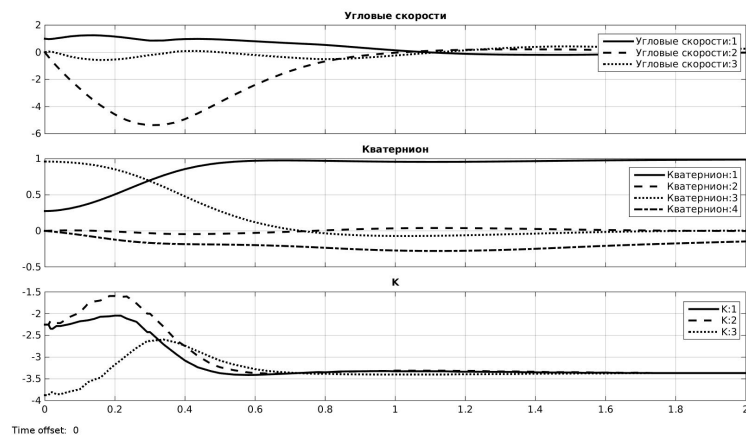


Рис. 1. Поведение системы во времени

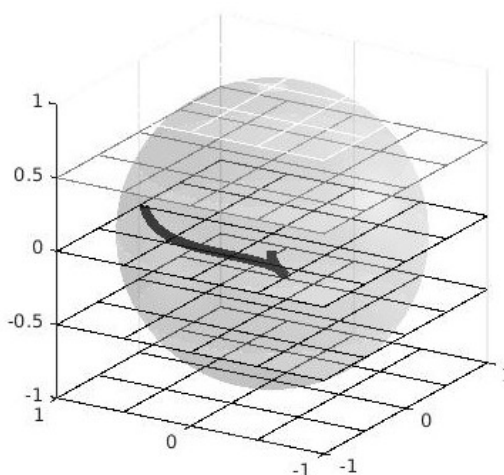


Рис. 2. Траектория движения текущей ячейки в памяти