Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Классификация двоичных всплесков Хаара на плоскости

Научный руководитель – Протасов Владимир Юрьевич

Зайцева Татьяна Ивановна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: zaitsevatanja@gmail.com

Системой всплесков на плоскости называется ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$, состоящий из целочисленных сдвигов и сжатий одной и той же функции, причем сжатия плоскости осуществляются с помощью определенной целочисленной *матрицы сжатия* M. Каждая система всплесков порождена определенной функцией, называемой масштабирующей функцией. Системы всплесков широко применяются для приближения гладких функций, хранения, сжатия и передачи информации, численного решения дифференциальных уравнений и т.д. Наиболее простыми всплесками с компактным носителем на плоскости являются системы Хаары. Они состоят из кусочно-постоянных функций, принимающих значений 0 и 1. Однако, если на прямой существует одна система Хаара (с масштабирующей функций – индикаторной функцией отрезка $[0, 1]$), то на плоскости таких систем бесконечно много (см. [1, 2]). Они порождены индикаторными функциями специальных плоских компактов – тайлов (tiles). Тайлы характеризуются двумя свойствами: 1) (самоподобие) $G = \cup_{d\in D} M^{-1}(G + d)$, где D – конечное множество целочисленных векторов, причем мера попарных пересечений всех множеств $M^{-1}(G + d)$ равна нулю; 2) (разбиение единицы) все целочисленные сдвиги множества G покрывают всю плоскость без перекрытий в один слой. Тайл, а также соответствующий всплеск Хаара, назовем двоичным, если множество D состоит из двух векторов или, что то же, $|\det M| = 2$.

Мы представляем классификацию всех двоичных всплесков Хаара. Для этого мы доказываем, что существуют всего шесть матриц сжатия M, генерирующих двоичные всплески, причем только три системы всплесков неизоморфны друг другу. Две из них широко известны – это тензорное произведение двух одномерных всплесков Хаара и всплеск, порожденной “кривой Дракона”. Третий класс всплесков менее известен. Далее мы используем недавний результат из работы [3] и находим точные значения показателей гладкости всплесков Хаара во всех пространствах L_p. При $p = 2$ эти значения позволяют оценить скорость убывания коэффициентов вейвлет-разложений по этим системам.

Источники и литература

1) K. Grochenig, W.R. Madych, Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings of Rn, IEEE Trans. Inform. Theory, 38 (1992), 556 - 568.
2) J. Lagarias and Y.Wang, Integral self-affine tiles in Rn. II. Lattice tilings, J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), 83 - 102.
3) M.Charina and V.Yu. Protasov, Smoothness of anisotropic wavelets, frames and subdivision schemes, arXiv:1702.00269
4) -
5) -