Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Разрешимость одной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами

Донцова Марина Владимировна
Аспирант
Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина, Нижегородская область, Россия
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (au(t,x) + bv(t,x) + h_1)\partial_x u(t,x) = f_1(t,x) \\ \partial_t v(t,x) + (cu(t,x) + gv(t,x) + h_2)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ - неизвестные функции, a, b, c, g - известные положительные константы, h_1, h_2 - известные отрицательные константы, f_1, f_2 - известные функции.

Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши, т.е. зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x) \tag{2}$$

Задача (1), (2) определена в области $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,\infty), T > 0\}$. В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента проводится исследование нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида (1) с начальными условиями (2) в области Ω_T. С помощью метода дополнительного аргумента и преобразований получена система интегральных уравнений [1], [2]:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (aw_1 + bw_3 + h_1)d\tau) + \int_0^s f_1(\tau, x - \int_\tau^t (aw_1 + bw_3 + h_1)d\nu)d\tau, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t (cw_4 + gw_2 + h_2)d\tau) + \int_0^s f_2(\tau, x - \int_\tau^t (gw_2 + cw_4 + h_2)d\nu)d\tau, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t (aw_1 + bw_3 + h_1)d\tau),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t (cw_4 + gw_2 + h_2)d\tau). \tag{5}$$

Обозначим $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ - пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T.

Справедлива теорема:

Теорема. *Если* $\varphi_i \in \bar{C}^2(R^1)$, $i = 1,2$, $f_1(t,x), f_2(t,x) \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, *и выполняются условия:* 1) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $g > 0$, $h_1 < 0$, $h_2 < 0$, 2) $\varphi_1'(x) \ge 0$, $\varphi_2'(x) \ge 0$ на R, 3)$\partial_x f_1 \ge 0$, $\partial_x f_2 \ge 0$ на Ω_T. *Тогда для любого* $T > 0$ *задача Коши*(1), (2) *имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (3) - (5).

Источники и литература

1) Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико – математические науки. 2013. №3 (177). С. 190—201.

2) Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379. №1. С. 16–21.