Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Решение многомерного уравнения Шрёдингера с помощью квазифейнмановских формул

Шелаков Михаил Григорьевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: shelakov.mikhail@mail.ru

Пусть $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}^d$ и функция $V\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ограничена и имеет ограниченную первую производную. Основной результат настоящего сообщения состоит в следующем. Задача Коши для d-мерного уравнения Шрёдингера

$$\begin{cases} \frac{i}{a}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = -\frac{1}{2}\Delta_x\psi(t,x) + V(x)\psi(t,x) \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

имеет единственное в $L_2(\mathbb{R}^d)$ решение, задаваемое равенством (квазифейнмановской формулой)

$$\psi(t,x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{q=0}^{m}\frac{(-1)^{m-q}i^m a^m n^m(\mathrm{sign}(t))^m}{q!(m-q)!}\left(\frac{n}{2\pi|t|}\right)^{qd/2}\times$$

$$\times\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}\dots\int_{\mathbb{R}^d}}_{q}\exp\left\{-\frac{|t|}{n}\left[\frac{1}{2}V(x)+\sum_{p=2}^{q}V\left(x+\sum_{j=p}^{q}y_j\right)+\frac{1}{2}V\left(x+\sum_{j=1}^{q}y_j\right)\right]-\frac{n}{2|t|}\sum_{j=1}^{q}\|y_j\|^2\right\}\times$$

$$\times\psi_0\left(x+\sum_{j=1}^{q}y_j\right)\prod_{j=1}^{q}dy_j.$$

Если в представленной формуле положить $d=1$, то получим формулу, которую в 2015 году доказали Д.В.Гришин и А.В.Смирнов [2]. Доказательство в случае $d>1$ в общих чертах схоже со случаем $d=1$ и может быть получено на основе теоремы Ремизова [1] и известной формулы для полугруппы, дающей решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^d$, имеющего постоянные коэффициенты.

Источники и литература

1) I.D.Remizov. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrodinger equation — J. Funct. Anal. 2015

2) D.V.Grishin, A.V.Smirnov, Quasi-Feynman formulas for the one-dimensional Schrödinger equation with a bounded smooth potential via the Remizov theorem, in: Int. Conf. “Infinite-Dimensional Dynamics, Dissipative Systems, and Attractors”, Nizhny Novgorod (Russia), July 13–17, 2015.