Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Случайные отображения и поперечники компактов в гильбертовом пространстве

Кореновская Ярослава Аркадьевна

Аспирант

Институт математики Национальной академии наук Украины, Отдел теории случайных процессов, Киев, Украина

E-mail: yaroslavaka@mail.ru

Основная задача — исследование изменения поперечников по Колмогорову компактов в гильбертовом пространстве под действием сильных случайных операторов (с.с.о.) [1].

Для операторов, определенных на $L_2(\mathbb{R})$, связанных со стохастическими потоками [3] следующим образом

$$(T_{s,t}f)(u) = f(\varphi_{s,t}(u)),$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}),\ u \in \mathbb{R},\ s \le t,\ \varphi_{s,t}$ — стохастический поток, были получены такие результаты:

Лемма 1 *Для того чтобы $T_{s,t}$ был ограниченным случайным оператором необходимо и достаточно, чтобы величина* $\sup_{u\in\mathbb{R}}\left(\frac{\partial\varphi_{s,t}(u)}{\partial u}\right)^{-1}$ *была конечной п. н.*

Лемма 2 *Пусть $\varphi_{s,t}$ — семейство решений стохастического дифференциального уравнения* $dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))dw(t),$ *где* $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ |a'| + |b'| \le L,\ \inf_{y\in\mathbb{R}} b(y) > 0.$ *Тогда $T_{s,t}$ — сильный случайный оператор.*

Достаточным условием существования образа компакта K под действием с.с.о. A является существование непрерывной модификации оператора A на K.

Лемма 3 *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, $K \subset H$ — компакт, A — гауссовский с.с.о., определенный на H, N^K — метрическая энтропия для K относительно $\|\cdot\|_H$. Если* $\int_{N^K(u)>1}\left(N^K(u)\right)^{\frac{1}{2}}du$ *конечен, то образ $A(K)$ определен и является компактом.*

Следующая теорема показывает, как меняются поперечники компактов под действием случайного оператора. Аналогичные утверждения для полугрупп случайных проекторов были получены в [2].

Определение n-поперечником по Колмогорову множества K называется величина $d_n(K) = \inf\limits_{dimL\le n}\sup\limits_{x\in K}\inf\limits_{y\in L}\|x-y\|_H$, где L — подпространство H.

Теорема *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{e_n,\ n \ge 1\}$ — ортонормированный базис в H, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые $N(0;1)$. Для компакта* $K = \left\{x \in H: \quad (x, e_n)^2 \le \frac{1}{n^2}, \quad \text{для всех } n \ge 1\right\}$ *и оператора A вида* $Ax = \sum_{n\ge1}\xi_n(x;e_n)e_n,$ *имеют место следующие соотношения*

$$d_n(K) \asymp \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad d_n(A(K)) \asymp \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{п. н.}$$

Источники и литература

1) Скороход А.В. Случайные линейные операторы. Киев. Наукова думка, 1978.
2) Dorogovtsev A.A. Semigroups of finite-dimensional random projections // Lith. Math. J. 2011. 51, No3. P. 330–341.
3) Kunita H. Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge University Press. 1990.