Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Орбиты группы автоморфизмов модуля над кольцом главных идеалов

Александра Гаража Андреевна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия

E-mail: sasha.garazha@mail.ru

Пусть A — кольцо главных идеалов, а M — конечнопорожденный A-модуль. По структурной теореме [1] модуль M разлагается в прямую сумму примарных и свободных циклических подмодулей, причем набор аннуляторов этих подмодулей определен однозначно. Описание орбит естественного действия $\mathrm{Aut}M : M$ легко сводится к описанию орбит действий $\mathrm{Aut}(\mathrm{Tor}_p M) : \mathrm{Tor}_p M/p^d\,\mathrm{Tor}_p M$ для всех p и d, где $\mathrm{Tor}_p M$ — подмодуль p-кручения.

Пусть теперь M — примарный модуль,

$$M = A\mathbf{e}_1 \oplus \cdots \oplus A\mathbf{e}_n, \quad \mathrm{Ann}\,\mathbf{e}_i = (p^{k_i}), \quad k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n. \tag{$*$}$$

Для элемента $x \in M$ обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ его проекции на слагаемые разложения $(*)$. Пусть $\pi : M \longrightarrow M/p^d M$ — канонический гомоморфизм модулей. Для каждого элемента $y \in M/p^d M$ назовем его прообраз $x \in \pi^{-1}(y)$ *правильным*, если высота прообраза $h(x)$ минимальна (среди высот прообразов элемента y), где под *высотой* элемента $x \in M$ понимается значение $h(x) := \min\{k : p^k x = 0\}$. Теперь для всякого $x \in M$ определим его *глубину* $d(x)$:

$$d(x) := \begin{cases} \max\,\{k : x \in p^k M\}, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Глубина и высота элементов сохраняются при автоморфизмах, более того, верна следующая

Теорема 1.

(1) *Набор чисел* $\{d(x),\, d(px),\, \ldots,\, d(p^{k_1-1}x)\}$ *является полной системой инвариантов действия* $\mathrm{Aut}M : M$.

(2) *Элементы модуля* $M/p^d M$ *принадлежат одной орбите группы* $\mathrm{Aut}M$ *тогда и только тогда, когда это же верно для их правильных прообразов.*

Таким образом, числа $\{d(x),\, d(px),\, \ldots,\, d(p^{k_1-1}x)\}$ однозначно определяют орбиту действия $\mathrm{Aut}M : M$. Но не любая последовательность возрастающих чисел соответствует какому-то элементу $x \in M$. Явное описание орбит дается при помощи следующего построения.

Каждый примарный модуль M может быть описан диаграммой Юнга Λ со столбцами высот $k_1, \ldots, k_n$. Поддиаграмму Юнга X со столбцами высот $l_1, \ldots, l_n$ назовем *подходящей* для диаграммы Λ, если найдется поддиаграмма Y такая, что $\Lambda = X + Y$ (сложение ведется по каждому из n столбцов) или, что то же самое, $0 \leq l_i - l_{i+1} \leq k_i - k_{i+1}$ при $i = 1 \ldots n$. Множество всех подходящих поддиаграмм обозначим через S.

Построим отображение $L : M \longrightarrow S$, определив его сначала на элементах $x \in M$ таких, что $x = x_i \in A\mathbf{e}_i$:

$$[L(x_i)]_t := \begin{cases} \max\{k_i - d(x_i), 0\}, & t \leq i, \\ \max\{k_t - d(x_i), 0\}, & t > i, \end{cases}$$

где $[L(x_i)]_t$ обозначает высоту t-го столбца диаграммы $L(x_i)$.

Теперь для всех $x \in M$ положим $L(x) := \bigcup L(x_i)$, где $x = x_1 + \cdots + x_n$. Таким образом, построено отображение $L : M \longrightarrow S$, а значит, может быть сформулирована

Теорема 2.

(1) *Отображение L задает взаимно-однозначное соответствие между множеством орбит действия* $\mathrm{Aut}M : M$ *и множеством* S.

(2) *Каноническими представителями орбит действия* $\mathrm{Aut}M : M$ *являются элементы вида*

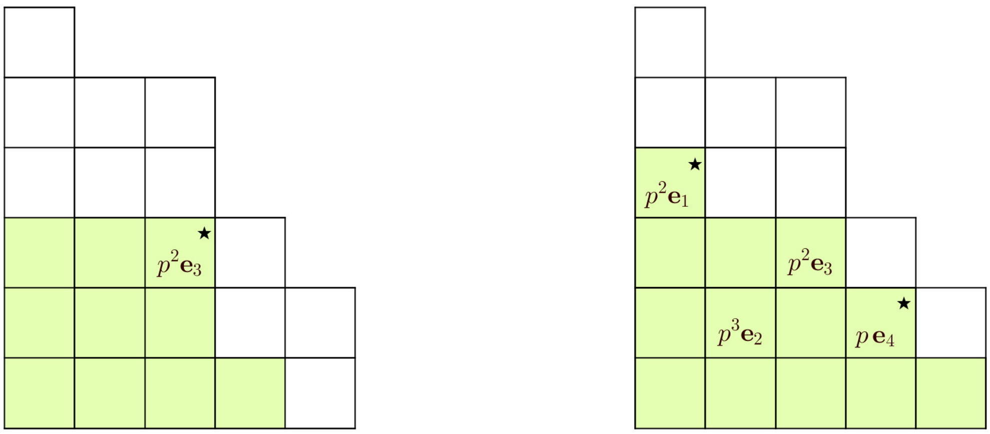
$$x = p^{d_1}\mathbf{e}_{i_1} + \cdots + p^{d_s}\mathbf{e}_{i_s}, \qquad \text{где} \begin{cases} i_1 > i_2 > \cdots > i_s, \\ k_{i_t} > k_{i_{t+1}}, \\ d_1 > d_2 > \cdots > d_s, \\ k_{i_1} - d_1 > \cdots > k_{i_s} - d_s. \end{cases} \tag{$**$}$$

(3) *Каноническими представителями орбит действия* $\mathrm{Aut}M : M/p^dM$ *являются элементы* $\pi(x) \in M/p^dM$, *где* $x \in M$ *определяются как в* $(**)$ *с единственным дополнительным условием* $d_1 < d$.

Источники и литература

1) Винберг Э. Б. Курс алгебры. — Новое издание, перераб. и доп. — М.: МЦНМО, 2011.

Иллюстрации



а) б)

Рис. 1. Поддиаграммы $L(x)$ для $x \in M$, где $M = A/(p^6) \oplus A/(p^5) \oplus A/(p^5) \oplus A/(p^3) \oplus A/(p^2)$ и
а) $x = x_i = p^2\mathbf{e}_3$; канонический представитель орбиты элемента x — $p^2\mathbf{e}_3$;
б) $x = p^2\mathbf{e}_1 + p^3\mathbf{e}_2 + p^2\mathbf{e}_3 + p\,\mathbf{e}_4$; канонический представитель орбиты элемента x — $p^2\mathbf{e}_1 + p\,\mathbf{e}_4$.