Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Одномерный оператор Шредингера с неограниченным потенциалом и точечными взаимодействиями

Ананьева Александра Юрьевна

Аспирант

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Метематика, Уравнения в частных производных, Донецк, Украина

E-mail: ananeva89@gmail.com

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$\ell_{X,\alpha,q} := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + \sum_{x_n\in X} \alpha_n \delta(x - x_n), \quad \alpha_n \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Пусть $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $x_{n+1} > x_n$ и $x_n \to +\infty$. Пусть также $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $d_n := x_n - x_{n-1}$ и $x_0 := 0$.
В пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ с выражением (1) связывают симметрический оператор (см. [1])

$$H^0_{X,\alpha,q} := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$
$$\mathrm{dom}(H^0_{X,\alpha,q}) = \left\{ f \in W^{2,2}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}_+ \setminus X) : f'(0) = 0, \begin{array}{c} f(x_n+) = f(x_n-) \\ f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n) \end{array}, \ n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{2}$$

Симметрический (не обязательно самосопряженный) оператор $H_{X,\alpha,q} := \overline{H^0_{X,\alpha,q}}$ интерпретируется как гамильтониан δ-взаимодействий интенсивностей α_n в центрах x_n.
В работе [2] исследована самосопряженность оператора $H_{X,\alpha,q}$ в случае $q(\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и $d_* = \inf_{n,k\in\mathbb{N}} |x_n - x_k| > 0$. Случай $q(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R})$ исследован в [3] при условии $d_* = 0$. В этой работе исследованы, в частности, самосопряженность, полуограниченность снизу и дискретность спектра оператора $H_{X,\alpha,q}$.
В дальнейшем мы предполагаем, что $q(\cdot)$ ступенчатая функция, т.е.

$$q(x) = q_n > 0, \qquad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

а также

$$d_n\sqrt{q_n} \le c, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Мы исследуем оператор $H_{X,\alpha,q}$ в рамках теории расширений симметрических операторов, применяя аппарат граничных троек и соответствующих функций Вейля.
Теорема 1. Предположим, что $H_{X,\alpha,q} = H^*_{X,\alpha,q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} d_n\sqrt{q_n} = 0$. Тогда спектр оператора $H_{X,\alpha,q}$ дискретен при условиях

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n-1}}{d_n} + q_{n-1}\right| = \infty, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{d_k(\alpha_k + q_{k+1}d_{k+1})} > -\frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d_n\alpha_{n-1}} > -\frac{1}{4}. \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть выполнено (4) и $d^* = \sup_{n,k\in\mathbb{N}} |x_n - x_k| < \infty$. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{d_{n+1}}, \tag{6}$$

то абсолютно непрерывные спектры операторов $H_{X,\alpha,q}$ и $H_{X,0,q}$ совпадают, $\sigma_{ac}(H_{X,\alpha,q}) = \sigma_{ac}(H_{X,0,q})$. Если, к тому же, $q(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то $\sigma_{ac}(H_{X,\alpha,q}) = \mathbb{R}_+$.

Источники и литература

1) Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R., Holden, H. Solvable Models in Quantum Mechanics, Sec. Edition, AMS Chelsea Publ., 2005.
2) Gesztesy, F., Kirsch, W. One-dimensional Schr¨odinger operators with interactions singular on a discrete set, J. reine Angew. Math. 362 (1985), 27–50.
3) Kostenko A.S. , Malamud M.M., 1-D Schr¨odinger operators with local point interactions on a discrete set, J. Differential Equations 249 (2010), 253–304.

Слова благодарности

Автор признателен М. М. Маламуду за постановку задачи и помощь в процессе выполнения работы.