Секция «Геометрия и топология»

Классификация метрических пространств, отношение Штейнера-Громова которых равно единице.

Пахомова Анастасия Сергеевна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: anpahkom@gmail.com

Отношение Штейнера-Громова $\mathrm{sgr}(\mathbb{X},\rho)$ — характеристика метрического пространства $(\mathbb{X},\rho)$, показывающая, насколько точно вес минимального остовного дерева $\mathrm{mst}(M)$ для произвольной границы M оценивается весом минимального заполнения $\mathrm{mf}(M)$. Сходным образом определяется n-точечное отношение Штейнера-Громова $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X},\rho)$. Разница состоит в том, что вместо произвольной границы M рассматривается граница, содержащая не более n точек. Известно, что для любого метрического пространства $\mathrm{sgr}(\mathbb{X},\rho)\le 1$. Доклад посвящен теореме, описывающей пространства, для которых данная оценка точна и $\mathrm{sgr}(\mathbb{X},\rho)=1$

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathrm{sgr}(\mathbb{X},\rho)=1$.
2) *Для любого конечного множества* $M\subset\mathbb{X}$ *выполняется равенство* $\mathrm{mf}(M)=\mathrm{mst}(M)$.
3) *Все треугольники в* $\mathbb{X}$ *вырождены.*
4) *Пространство* $(\mathbb{X},\rho)$ *изометрично некоторому подмножеству евклидовой прямой или изометрично четырехточечному пространству* $\{x_i\}$ $(i=1,2,3,4)$ *со следующими расстояниями между точками*

$$\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,x_3)=\rho(x_1,x_3);\qquad \rho(x_i,x_j)=\rho(x_k,x_l)$$

для любой перестановки (i,j,k,l) *индексов* $(1,2,3,4)$.

5) *Существует* $n\ge 3$, *такое что* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X},\rho)=1$.
6) *Для любого* $n\ge 2$, *верно что* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X},\rho)=1$.

Источники и литература

1) Иванов А.О., Тужилин А.А., Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб., 203:5 (2012), 65–118
2) Пахомова А.С., Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера– Громова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2014, № 1, 17–25
3) B.Richmond, T.Richmond, Metric Spaces in which All Triangles Are Degenerate // American Mathematical Monthly, Vol. 104, № 8 (Oct. 1997) 713-719

Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, д. ф.-м. н. А. О. Иванову за помощь на этапе решения задачи, а также д. ф.-м. н. А. А. Тужилину и всем участникам семинара «Оптимальные сети» за проявленный интерес к работе.